УДК. 514.18

О.В. Воронцов, к.т.н., доцент
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

СПЕЦІАЛЬНІ ГЕОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ ОБ'ЄКТІВ МАШИНОБУДУВАННЯ ТА БУДІВНИЦТВА

Продовжено дослідження з визначення дискретних аналогів аналітичних залежностей на основі геометричного апарату суперпозицій та можливості їх використання для дискретного моделювання геометричних образів об'єктів машинобудування та будівництва числовими послідовностями. Досліджено степеневі, показникові, логарифмічні функції.

Ключові слова: *дискретне геометричне моделювання, метод скінчених різниць, рекурентні залежності, математичний апарат числових послідовностей, геометричний апарат суперпозицій.*

УДК. 514.18

О.В. Воронцов, к.т.н., доцент
Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ МАШИНОСТРОЕНИЯ И СТРОИТЕЛЬСТВА

Продолжены исследования по определению дискретных аналогов аналитических зависимостей на основе геометрического аппарата суперпозиций и возможностей их использования для дискретного моделирования геометрических образов объектов машиностроения и строительства числовыми последовательностями. Исследованы степенные, показательные, логарифмические функции.

Ключевые слова: *дискретное геометрическое моделирование, метод конечных разностей, рекуррентные зависимости, математический аппарат числовых последовательностей, геометрический аппарат суперпозиций.*

UDC. 514.18

O.V. Vorontsov, PhD, Associate Professor
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

SPECIAL GEOMETRICAL MODELS OF OBJECTS IN ENGINEERING AND CONSTRUCTION

In this work the investigation determine the discrete analogues of analytical dependences with the use of geometrical set of superposition has been continued to be carried out. Power series functions, exponential, logarithmic functions has been investigated. The results can be used for the discrete design of geometrical characters in engineering and construction with the use numerical sequences of the above-stated analytical dependences and without generating and working out of linear equation systems.

Keywords: *discrete geometrical design, method of finite differences, recurrent dependences, mathematical set of numerical sequences, geometrical set of superposition.*

Вступ. У процесі проектування сучасних об'єктів будівництва, архітектури, машинобудування важливе місце займає етап геометричного моделювання, коли на стадії ескізу визначаються основні параметри їх геометричної форми. При цьому якість моделей залежить від можливостей ефективного управління їх геометрією, корегування як моделей у цілому, так і їх окремих частин, швидкого аналізу та порівняльної оцінки отриманих результатів [1].

Геометричне моделювання охоплює широкий спектр інженерних задач, вирішення яких потребує врахування якомога більшої кількості вихідних даних і вимог для забезпечення відповідної точності моделі, отже, передбачає створення складних і багатокомпонентних інтерпретаційних моделей. Такі моделі мають бути достатньо гнучкими відносно геометричної складності та масштабності поставленої задачі. У зв'язку з цим широкого застосування набули математичні методи чисельного моделювання й сучасні методи прикладної геометрії (зокрема, дискретного геометричного моделювання), які в цілому посилюють операційні можливості чисельних методів.

Одним із важливих напрямів дискретної геометрії є статико-геометричний метод (СГМ) [2], створений на основі статичної інтерпретації класичного методу скінченних різниць. Його простота і практичність виявляються у конструктивності та наочності процесу формоутворення геометричного образу деякого неперервного об'єкта під дією зовнішнього навантаження з урахуванням заданих умов. Сам дискретний образ являє собою ідеалізовану модель сітки, в'язі якої є нерозтяжними нитками, а зовнішні навантаження сприймаються вузлами цієї сітки. Зручність СГМ полягає також у можливості інтерпретувати не тільки об'єкти, топологічно близькі до стрижневих або сітчастих конструкцій, а й будь-які фізичні процеси, які передбачають урахування взаємодії між окремими їх компонентами, довільним чином розташованими у просторі.

Однак головним недоліком СГМ є необхідність складання і розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь. Цього недоліку можна позбутися за рахунок використання математичного апарату та геометричної інтерпретації числових послідовностей, а також геометричного апарату суперпозицій.

Залучення математичного апарату числових послідовностей і геометричного апарату суперпозицій для формування дискретно визначених геометричних образів довільної вимірності значно розширює можливості дискретного геометричного моделювання об'єктів, процесів та явищ. Ґрунтовні дослідження геометричних властивостей апарату суперпозицій і визначення на їх основі головних аспектів нового напряму дискретного формування геометричних образів є перспективними.

Теорія формоутворення дискретних геометричних образів на цій основі дозволить значно зекономити обчислювальні ресурси, скоротити етап побудови й аналізу геометричних моделей об'єктів, процесів та певних явищ; спростити процес розв'язання конструктивних задач.

Фундаментальні системні дослідження геометричних властивостей апарату суперпозицій для формування дискретних образів у поєднанні із класичними чисельними методами, відомими методами дискретного моделювання та перетворень дозволять відкрити нові можливості при розв'язанні конкретних прикладних задач у різних галузях науки, техніки і виробництва. [1].

Огляд останніх джерел досліджень і публікацій. Питання дослідження методики дискретного моделювання аналітичних залежностей із використанням геометричного апарату суперпозицій на прикладах поліномів різних степенів, дробово-лінійних функцій загального вигляду розглянуті у статтях автора цієї роботи [3,4,5]. Виведені формули для визначення координат довільних точок дискретних аналогів вищеназваних залежностей як суперпозицій двох довільних точок та початку системи координат.

Такі дослідження є актуальними для всіх класів елементарних функцій, оскільки ця методика дозволяє вирішувати задачі моделювання геометричних образів дискретними аналогами подібних функцій без складання і розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь.

Постановка завдання. Мета роботи полягає у проведенні досліджень методики дискретного моделювання числовими послідовностями степеневих, показникових, логарифмічних функцій та узагальненні попередніх результатів із використанням геометричного апарату суперпозицій одновимірних точкових множин.

Основний матеріал і результати. Функції $y=cx$, $y=cx^2$, $y=\frac{c}{x}$ є окремими видами степеневої функції (*n=1, n=2, n= -1*), питання визначення дискретних аналогів яких частково досліджені у роботі [1]. При цілому *n* буде раціональна функція. При *n* дробовому ($\frac{p}{q}$) матимемо радикал $y=\sqrt[q]{x^p}$.

Числова послідовність показникової функції $y=c^x$, де *c* – додатне число (відмінне від одиниці), має вигляд $a_i=c^i$. Звільняючись від дискретного параметра ***i***, можна одержати для суміжних вузлів цієї числової послідовності різні рекурентні формули [2] :

$$\begin{cases} a_i=c^i \\ a_{i+1}=c^i c \end{cases} \Rightarrow a_{i+1}=ca_i \; ; \quad \begin{cases} a_{i+1}=ca_i \\ a_{i+2}=ca_{i+1} \end{cases} \Rightarrow a_{i+2}=\frac{a_{i+1}^{\;2}}{a_i} \; ;$$

$$\begin{cases} a_{i+1}=ca_i \\ a_{i+3}=ca_{i+2} \end{cases} \Rightarrow a_{i+3}=\frac{a_{i+1}a_{i+2}}{a_i} \text{, або: } a_{i+3}=\frac{a_{i+1}^{\;3}}{a_i^{\;2}} \; ;$$

$$\begin{cases} a_{i+1} = ca_i \\ a_{i+4} = ca_{i+3} \end{cases} \Rightarrow a_{i+4} = \frac{a_{i+1}{}^2 a_{i+2}}{a_i^2}; \quad \begin{cases} a_{i+2} = ca_{i+1} \\ a_{i+4} = ca_{i+3} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{a_{i+4}} = \frac{a_{i+1} a_{i+2}{}^2}{a_i a_{i+1}};$$

$$\begin{cases} a_{i+3} = \dfrac{a_{i+1} a_{i+2}}{a_i} \\ a_{i+4} = ca_{i+3} \end{cases} \Rightarrow a_{i+4} = \frac{a_{i+1}{}^2 a_{i+2}}{a_i^2}, \text{ а також: } a_{i+4} = \frac{a_{i+2}{}^2}{a_i}.$$

Координати довільних точок (несуміжних вузлів) послідовності $a_i = c^i$ (рис. 1) можуть бути визначені як суперпозиції координат початку системи координат та двох довільних точок цієї послідовності [1 – 3].

Знайдемо такі числа k_1, k_2, k_3, щоб

$$\begin{cases} k_3 0 + k_1(i+p_1) + k_2(i+p_2) = i+p \\ k_3 0 + k_1 c^{i+p_1} + k_2 c^{i+p_2} = a_{i+p} \\ k_1 + k_2 + k_3 = 1 \end{cases}; \tag{1}$$

$$k_1 = \frac{(i+p)a_{i+p_2} - (i+p_2)a_{i+p}}{(i+p_1)a_{i+p_2} - (i+p_2)a_{i+p_1}}; \tag{2}$$

$$k_2 = \frac{(i+p_1)a_{i+p} - (i+p)a_{i+p_1}}{(i+p_1)a_{i+p_2} - (i+p_2)a_{i+p_1}}. \tag{3}$$

Тоді

$$a_{i+p} = \frac{(i+p)a_{i+p_2} - (i+p_2)a_{i+p}}{(i+p_1)a_{i+p_2} - (i+p_2)a_{i+p_1}} a_{i+p_1} + \frac{(i+p_1)a_{i+p} - (i+p)a_{i+p_1}}{(i+p_1)a_{i+p_2} - (i+p_2)a_{i+p_1}} a_{i+p_2} =$$

$$= \frac{(i+p) - (i+p_2)a_{(i+p-i+p_2)}}{(i+p_1) - (i+p_2)a_{(i+p_1-i+p_2)}} a_{i+p_1} + \frac{(i+p) - (i+p_1)a_{(i+p-i+p_1)}}{(i+p_2) - (i+p_1)a_{(i+p_2-i+p_1)}} a_{i+p_2}.$$

Або за умови $i+p = p; \;\; i+p_1 = p_1; \; i+p_2 = p_2$:

$$a_p = \frac{p - p_2 a_{p-p_2}}{p_1 - p_2 a_{p_1-p_2}} a_{p_1} + \frac{p - p_1 a_{p-p_1}}{p_2 - p_1 a_{p_2-p_1}} a_{p_2}. \tag{4}$$

Наприклад, для послідовності $a_i = 3^i$, при $p=3, p_1=1, p_2=4$:

$$a_3 = k_1 a_1 + k_2 a_4; \tag{5}$$

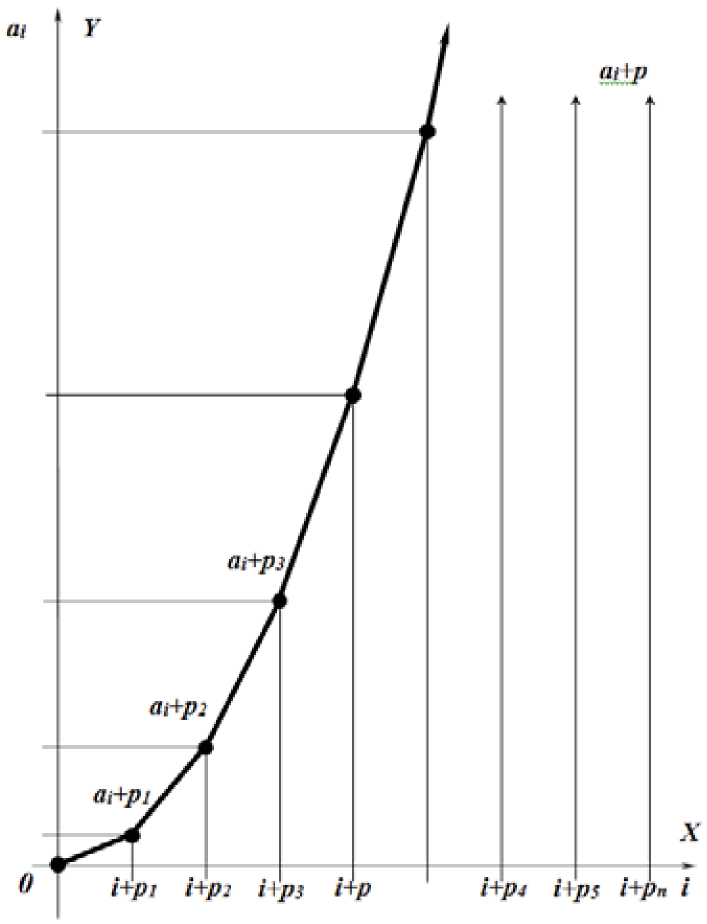

Рис. 1 – Графік числової послідовності $a_i = c^i$

$$k_1 = \frac{3-4\times\frac{1}{3}}{1-4\times\frac{1}{27}} = \frac{45}{23}\ ;\ k_2 = \frac{3-3^2}{4-27} = \frac{6}{23}\ .$$

$$a_3 = 3^3 = 27\ ;\ a_1 = 3\ ;\ a_4 = 3^4 = 81\ ;$$

$$a_{p-p_2} = a_{-1} = \frac{1}{3};\ a_{p_1-p_2} = a_{-3} = \frac{1}{27};\ a_{p-p_1} = a_2 = 9;\ a_{p_2-p_1} = a_3 = 27.$$

$$27 = \frac{45}{23}\times 3 + \frac{6}{23}\times 81 = \frac{45\times 3 + 6\times 81}{23} = \frac{6\times 21}{23} = 27\ .$$

Логарифмічна функція $y = log_c x$, де c, як і в попередньому випадку, додатне число (відмінне від одиниці), x приймає тільки додатні значення, є зворотною показниковій. Її графік виходить із графіка показникової функції (із тією ж основою) згинанням креслення по бісектрисі першого координатного кута (рис. 2).

Тому одержані рекурентні формули числових послідовностей показникової функції можуть бути використані у дискретному геометричному моделюванні як дискретні аналоги і логарифмічних функцій.

Графік будь-якої числової послідовності, що є зворотною заданій, може бути одержано так само.

Тому виведені у попередніх дослідженнях [3 – 5] рекурентні формули числових послідовностей різних функцій можна вважати дискретними аналогами і зворотних до них функцій.

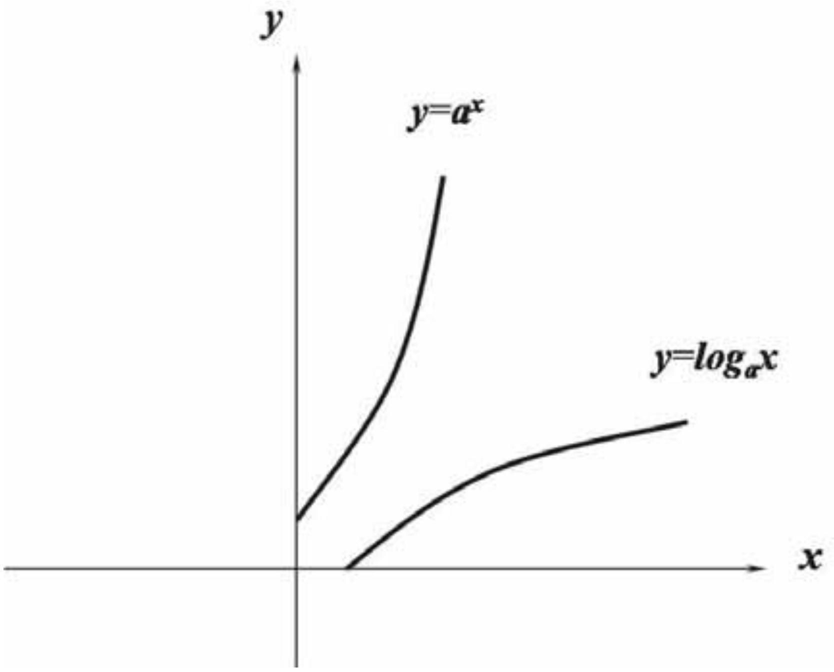

Рис. 2 – Графіки логарифмічної та показникової функцій

Дискретними аналогами класу алгебраїчних функцій будуть такі:

цілої раціональної функції $a_i = b_0 i^n + b_1 i^{n-1} + \ldots + b_{n-1} i + b_n$;

дробової раціональної функції $a_i = \dfrac{b_0 i^n + b_1 i^{n-1} + \ldots + b_{n-1} i + b_n}{c_0 i^m + c_1 i^{m-1} + \ldots + c_{m-1} i + c_m}$;

ірраціональної функції $a_i = f(i)$,

коли у правій частині такої замкненої числової послідовності виконуються операції додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення у степінь із раціональними нецілими показниками.

Для загального випадку алгебраїчної функції дискретним аналогом буде числова послідовність $a_i = f(i)$, що задовольняє рівнянню вигляду

$P_0(i) a_i^n + P_1(i) a_i^{n-1} + \ldots + P_n(i) = 0$, де $P_0(i),\ P_1(i), \ldots,\ P_n(i)$ – деякі многочлени від $\boldsymbol{i}$.

Таким чином, застосування виведених у роботах [1 – 3] формул обчислення показників суперпозицій одновимірних точкових множин, дозволить визначати аналітичні вирази дискретних аналогів алгебраїчних функцій загального вигляду за рахунок запропонованої методики обчислення координат довільних точок дискретних аналогів вищезазначених многочленів $P_0(i),\ P_1(i), \dots ,\ P_n(i)$ на основі суперпозицій одновимірних точкових множин.

Використовуючи математичне поняття суперпозиції функцій (або накладення функцій), яке полягає у тому, що замість аргументу даної функції підставляється певна функція від іншого аргументу, рекурентний аналог, наприклад, функції $z = a^{\frac{log_2 x}{log_2 x\text{-}1}}$ також можна визначити, послідовно представивши її як суперпозицію двох функцій: $y = \frac{log_2 x}{log_2 x\text{-}1}$ та $z = a^y$. Функція, зворотна функції $y = \frac{log_2 x}{log_2 x\text{-}1}$, має вигляд $y = 2^{\frac{x}{x\text{-}1}}$, яка у свою чергу може бути представлена суперпозицією двох функцій: $k = \frac{x}{x\text{-}1}$ та $y = 2^k$. Рекурентний аналог функції $y = 2^{\frac{x}{x\text{-}1}}$ матиме вигляд $a_i = 2^{\frac{i}{i\text{-}1}}$. Одержавши ряд дискретних значень цієї функції, дискретні значення функції $y = \frac{log_2 x}{log_2 x\text{-}1}$ будуть отримані, як симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів; далі можна використовувати виведені вище рекурентні формули для показникової функції.

Крім вищеперелічених підходів до дискретного моделювання одновимірними числовими послідовностями із використанням геометричного апарату суперпозицій, також можна застосувати такий.

Наприклад, для дискретного аналога дробово-лінійної функції (рис. 3) $a_i = \frac{1}{i}$ можна спростити формули розрахунку показників суперпозиції порівняно з наведеними у роботі [2]. Оскільки координати довільної точки послідовності першого порядку $a_i = m_0 + m_1 i$ (рис. 4), що є дискретним аналогом полінома першого степеня $y = m_0 + m_1 x$, можуть бути визначені за формулою $a_{i+p} = k_1 a_{i+p_1} + k_2 a_{i+p_2}$, де $k_1 = \frac{p_2\text{-}p}{p_2\text{-}p_1}$; $k_2 = \frac{p\text{-}p_1}{p_2\text{-}p_1}$, то відповідно для послідовності $a_i = \frac{1}{i}$: $\frac{1}{a_{i+p}} = k_1 \frac{1}{a_{i+p_1}} + k_2 \frac{1}{a_{i+p_2}}$.

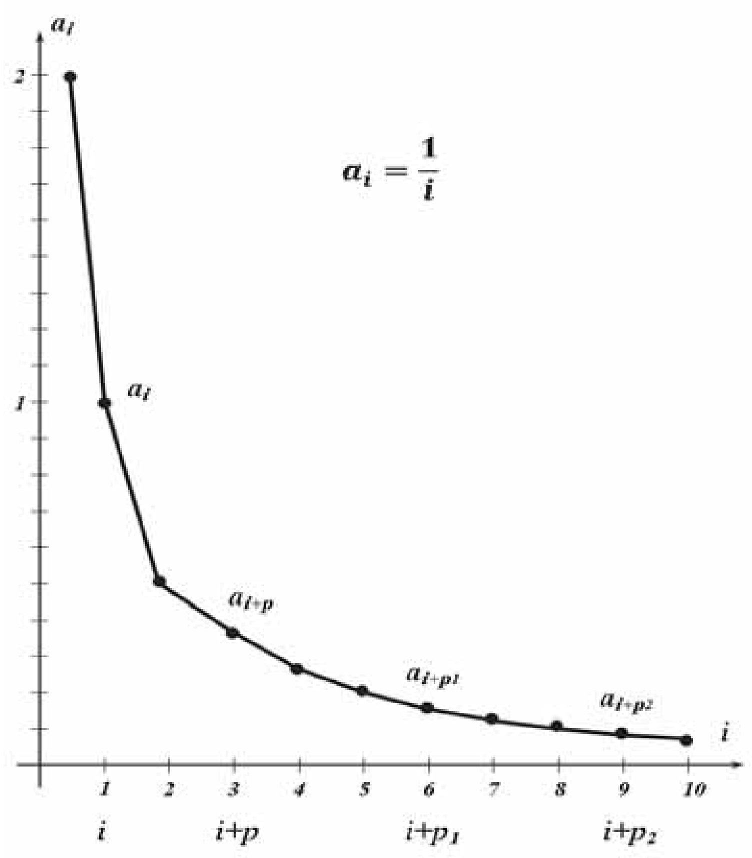

Рис. 3 – Графік дробово-лінійної функції $a_i = \frac{1}{i}$

Для послідовності $a_i = i^2$: $a_{i+p}^{\frac{1}{2}} = k_1 a_{i+p_1}^{\frac{1}{2}} + k_2 a_{i+p_2}^{\frac{1}{2}}$;

для послідовності $a_i = i^n$: $a_{i+p}^{\frac{1}{n}} = k_1 a_{i+p_1}^{\frac{1}{n}} + k_2 a_{i+p_2}^{\frac{1}{n}}$.

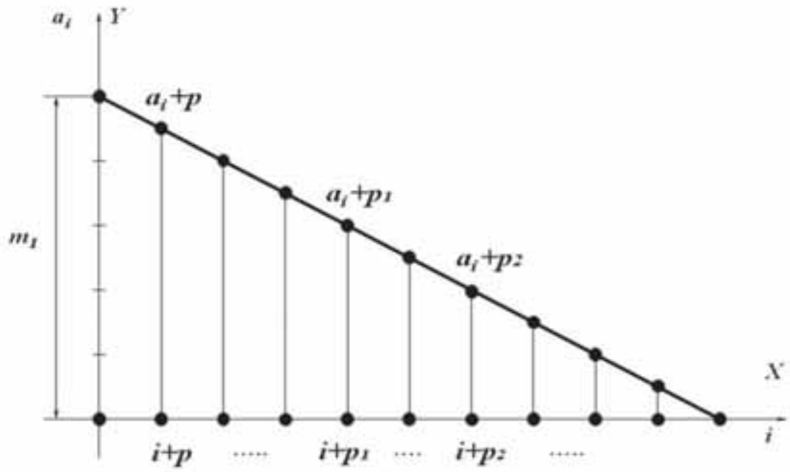

Рис. 4 – Графік числової послідовності $a_i = m_0 + m_1 i$

Висновки. У роботі одержано аналітичні вирази для визначення дискретних аналогів степеневих, показникових, логарифмічних функцій із використанням геометричного апарату суперпозицій одновимірних точкових множин та узагальнено попередні дослідження. Ці результати можуть бути використані для дискретного моделювання геометричних образів об'єктів машинобудування і будівництва числовими послідовностями вищеперелічених аналітичних залежностей без складання й розв'язання систем лінійних рівнянь.

Література

1. *Воронцов, О.В. Геометричні задачі у процесах дискретного моделювання об'єктів будівництва та машинобудування / О.В. Воронцов // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво) / Полтав. нац. техн. ун-т ім. Юрія Кондратюка, 2011. – Вип. 2(30). – С. 10 – 15.*
2. *Ковалев, С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: дис. д-ра техн. наук: 05.01.01/Ковалев Сергей Николаевич. – М., 1986. – 348 с.*
3. *Воронцов, О.В. Визначення дискретного аналогу полінома n-го степеня суперпозиціями точок числової послідовності n-го порядку / О.В. Воронцов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 63 – 67.*
4. *Воронцов, О.В. Визначення дискретного аналогу дробово-лінійної функції суперпозиціями одновимірних точкових множин / О.В. Воронцов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 91. – С. 64 - 68.*
5. *Воронцов, О.В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями точок числових послідовностей дробово-лінійних функцій / О.В. Воронцов, Н.О. Махінько // Прикладна геометрія та інженерна графіка / Праці ТДАТА. Вип. 4. – Т. 57. – Мелітополь: ТДАТА, 2013. – С. 62 – 67.*

Надійшла до редакції 14.04.2014

©О.В. Воронцов