

Кузло М.Т., д.т.н., доцент
Національний університет водного господарства та природокористування

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ҐРУНТУ ОСНОВИ ОПОРИ МОСТА ПРИ ДІЇ ГІДРОДИНАМІЧНИХ СИЛ ФІЛЬТРАЦІЙНОГО ПОТОКУ

Розвинено й удосконалено математичні моделі фільтрації та напружено-деформованого стану ґрунту з прогнозу деформацій водонасичених основ при дії гідродинамічних сил фільтраційного потоку води. Розвинено числові методи конформних відображень розв'язання задач із складними межами області фільтрації. Для цих математичних моделей отримано чисельні розв'язки відповідних крайових задач фільтрації та напружено-деформованого стану ґрунту. На основі запропонованих математичних моделей фільтрації й напружено-деформованого стану ґрунту та їх чисельних розв'язків створено програмний комплекс для розрахунку на ПЕОМ, що дозволяє прогнозувати деформації водонасичених ґрунтових основ при дії гідрологічних умов. Проведено чисельні експерименти з дослідження вертикальних і горизонтальних зміщень ґрунту основи опори мосту.

Ключові слова: математична модель, ґрунтова основа, напружено-деформований стан, вертикальні й горизонтальні зміщення, фільтраційний потік.

Кузло Н.Т., д.т.н., доцент
Национальный университет водного хозяйства и природопользования

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ГРУНТА ОСНОВАНИЯ ОПОРЫ МОСТА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА

Развиты и усовершенствованы математические модели фильтрации и напряженно-деформированного состояния грунта по прогнозированию деформаций водонасыщенных оснований при воздействии гидродинамических сил фильтрационного потока воды. Развиты численные методы конформных отображений решения задач со сложными границами области фильтрации. Для данных математических моделей получены численные решения соответствующих задач фильтрации и напряженно-деформированного состояния грунта. На основании предложенных математических моделей фильтрации и напряженно-деформированного состояния грунта создан программный комплекс для расчета на ПЕОМ, позволяющий прогнозировать деформации водонасыщенных грунтовых оснований при воздействии гидрологических условий. Проведены численные эксперименты по исследованию вертикальных и горизонтальных смещений грунта основания опоры моста.

Ключевые слова: математическая модель, грунтовое основание, напряженно-деформированное состояние, вертикальные и горизонтальные смещения, фильтрационный поток.

MODELLING OF BRIDGE BEARING BASIS' SOIL DEFORMATIONS UNDER THE ACTION OF HYDRODYNAMICAL POWERS OF FILTRATION FLOW

Mathematical models of filtration and strained-deformed state of soil from the forecast of deformations of water saturated basis under the action of hydrodynamical powers of filtration water flow.

Taking into account the fact that there are relatively small zones of limit strained state in comparison with the whole strained sphere in the conditions of existence of bridge bearings in soil, it is admissible to use the theory of elasticity for determination of deformations from hydrodynamical powers of filtration water flow.

Furthermore, under the determination of strained-deformed state of soil massifs under the action of internal volume powers, it is considered that soil is not in the state of limit balance before application of additional load to it, because in the contrary case application of load causes disturbance of solidity.

Because of it it is quite appropriate to use decisions of theory of linear deformed environment for the determination of tensions under the action of action of internal volume powers.

Numerical methods of conformed reflections of problems solutions with the complex limits in the area of filtration have been developed. The algorithm of hydrodynamical net structure has been elaborated. The transformation of differential equations of filtration and strained-deformed state of soil environment in displacements and limit conditions and their limit conditions by the method of numerical conformed reflections has been fulfilled.

The numerical solutions of these equations have been obtained. The numerical solutions of appropriate limit problems and strained-deformed state for these mathematical models have been obtained by the way of construction of parametric rectangle in the plane of diversity scheme with the usage of pattern of kind «cross» and its solution of itinerary method of consecutive upper relaxation on the net.

The program complex for PC has been created on the basis of offered mathematical models of filtrations and strained-deformed state of soil and their numerical solutions, which allows to forecast deformations of water saturated soil bases under the action of hydrological conditions.

The results in the form of graphics in the window have been represented. There is the possibility to save numerical results in the text file. During the fulfilling of a program one can look through the graphics in any time moment.

Numerical experiments in the investigation of vertical and horizontal displacements of soil basis of bridge bearing have been carried out.

It has been determined that under the availability of bridge bearings on deep-water rivers, we can get the biggest results of vertical displacements of soil basis in the limit points of the upper border of filtration area, horizontal – in the typical points, which are located on vertical lines, going through the edges of the foundation of bridge bearing.

Keywords: *mathematical model, soil basis, strained-deformed state, vertical and horizontal displacements, filtration flow, numerical modeling, conformed reflection.*

Вступ. При проектуванні, будівництві та експлуатації мостових опор на глибоководних річках можуть виникати гідродинамічні сили фільтраційного потоку, які призводять до додаткових деформацій ґрунту основи. Розв'язання цієї проблеми вимагає вирішення питань з установлення параметрів фільтраційного потоку, визначення гідродинамічних об'ємних сил і відповідних їм вертикальних і горизонтальних зміщень ґрунту основи.

Аналіз останніх джерел досліджень і публікацій з цього питання показав, що існує ряд теоретичних рішень з визначення параметрів фільтраційного потоку в ґрунтових масивах, вертикальних деформацій від додаткового навантаження і зміни власної ваги ґрунту [1 – 5]. Однак питання з визначення вертикальних і горизонтальних зміщень від дії фільтраційного потоку зі складними граничними умовами недостатньо вивчено.

Постановка завдання. З метою встановлення вертикальних і горизонтальних зміщень ґрунту основи при дії фільтраційного потоку води розглянемо мостову опору, розміщену на водопроникній основі (рис. 1).

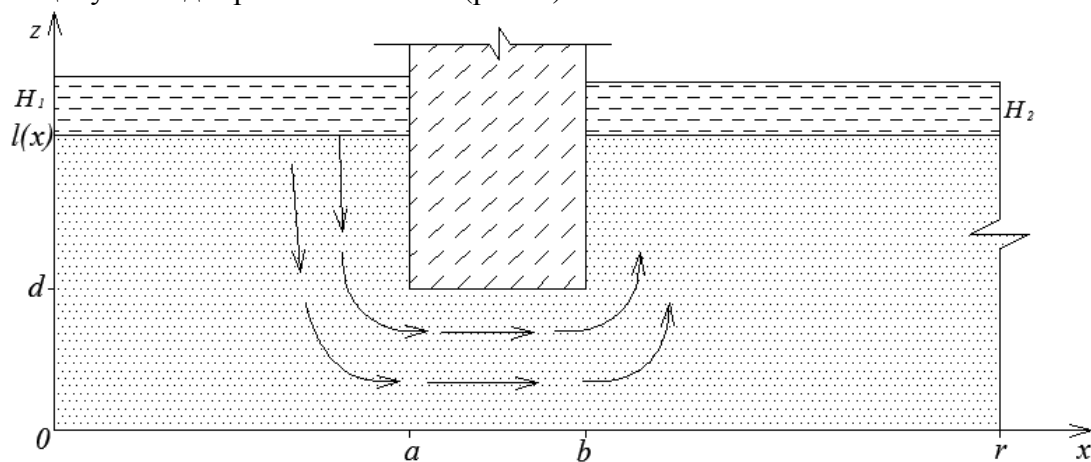


Рис. 1 – Розрахункова схема для моделювання деформацій ґрунту основи опори мосту

У зв'язку з різницею напорів ($H_1 > H_2$) виникає фільтраційний потік у ґрунті основи, який зумовлює горизонтальні та вертикальні зміщення.

Обмежимо ґрунтовий масив з боків радіусом впливу фільтраційного потоку. Отримаємо криволінійний чотирикутник у площині xOz , обмежений знизу горизонтальною, а з боків вертикальними лініями. Зверху – лінією, що враховує кривизну поверхні ґрунту та форму опори мосту.

Розглянемо область ґрунту $\Omega = \{(x, z) | x \in (0, r), z \in (0, l(x))\}$, де $l(x)$ – поверхня ґрунту. Розіб'ємо верхню межу $l(x)$ на три ділянки:

– ділянка, яка дотикається до опори

$$A_1 = \{x = a, d < z < l(a)\} \cup \{a < x < b, z = d\} \cup \{x = b, d < z < l(b)\};$$

– ділянки, що знаходяться відповідно справа та зліва від опори мосту

$$A_2 = \{0 < x < a, z = l(x)\};$$

$$A_3 = \{b < x < r, z = l(x)\}.$$

Прийнявши до уваги те, що в умовах існування гідротехнічних споруд в ґрунті основи наявні відносно малі зони граничного напруженого стану порівняно з усією напруженою областю, цілком допустимим є застосування теорії лінійно деформованого середовища для визначення деформацій від фільтраційного потоку води.

Основний матеріал і результати. Математична модель НДС ґрунту основи у зміщеннях описується такими диференціальними рівняннями:

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = \gamma_w \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\mu \Delta w + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \gamma_{sb} + \gamma_w \frac{\partial H}{\partial z} \quad (2)$$

за таких граничних умов:

$$u(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad (3)$$

$$u(0, z) = 0, \quad u(r, z) = 0, \quad (4)$$

$$\tau_{xz}(0, z) = 0, \quad \tau_{xz}(r, z) = 0, \quad (5)$$

$$u|_{(x,z) \in A_1} = 0, \quad w|_{(x,z) \in A_1} = 0, \quad (6)$$

$$\tau_n|_{(x,z) \in A_2 \cup A_3} = 0, \quad \sigma_n|_{(x,z) \in A_2 \cup A_3} = 0. \quad (7)$$

Тут $H(x, z)$ – напір у точці (x, z) ; Δ – оператор Лапласа; λ, μ – пружні сталі; $u(x, z)$ – горизонтальні зміщення, $w(x, z)$ – вертикальні зміщення; $\gamma_w = \rho_w g$ – питома вага води; γ_{sb} – питома вага ґрунту у зваженому стані; τ_{xz} – головні дотичні напруження; σ_n – нормальні напруження; τ_n – дотичні напруження.

Для того щоб знайти зміщення у ґрунтовому масиві, необхідно знати напори в усіх точках масиву в початковий та кінцевий моменти часу. Для визначення напорів в області Ω знайдемо розв’язок диференціального рівняння стаціонарної фільтрації

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

за таких граничних умов:

$$H(0, z) = H|_{(x,z) \in A_2} = H_1, \quad H(r, z) = H|_{(x,z) \in A_3} = H_2, \quad (9)$$

$$\frac{\partial H(x, 0)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial z}|_{(x,z) \in A_1} = 0, \quad (10)$$

де H_1, H_2 – відомі напори зліва та справа від опори.

Отримаємо розв’язок задачі (8) – (10). Для цього здійснимо чисельне конформне відображення області Ω на параметричний прямокутник у площині $\xi O \eta$ [6].

Відображення виконуємо таким чином: задаємо $h_\xi = h_\eta = l$ – кроки сітки по ξ та по η . Сторони параметричного прямокутника визначаємо, виконавши пошук приблизного значення модуля конформного відображення. Для цього задаємо бажану загальну кількість вузлів сітки N . Оптимальним вважаємо таку кількість кроків сітки по ξ та по η n_1, n_2 , при яких зважений критерій середнього відношення сторін та середнього відношення діагоналей елементарних прямокутників сітки якомога ближчий до одиниці, а кількість вузлів сітки $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \approx N$.

Алгоритм побудови гідродинамічної сітки, згідно з методом чисельного конформного відображення, полягає в наступному. Спочатку задаємо початкові значення координат плаваючих вузлів на сторонах криволінійного чотирикутника $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$. Початкові вузли розміщуємо рівномірно на кожній стороні криволінійного чотирикутника, при цьому кутові вузли знаходяться в точках дотику сусідніх меж:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : z = 0 &\Rightarrow \eta = 0, \\ \Gamma_2 : (x, z) \in A_1 &\Rightarrow \eta = n_1, \\ \Gamma_3 : \{x = 0\} \cup \{(x, z) \in A_2\} &\Rightarrow \xi = 0, \\ \Gamma_4 : \{x = r\} \cup \{(x, z) \in A_3\} &\Rightarrow \xi = n_2. \end{aligned}$$

Обчислюємо початкові координати внутрішніх вузлів різницевої сітки, використовуючи формули:

$$\begin{cases} x_{ij}^0 = \frac{1}{2}(x_{i0} + x_{i,n_2} + x_{0j} + x_{n_1,j}), \\ z_{ij}^0 = \frac{1}{2}(z_{i0} + z_{i,n_2} + z_{0j} + z_{n_1,j}), \end{cases} i = \overline{1, n_1 - 1}, j = \overline{1, n_2 - 1}.$$

Уточнюємо координати внутрішніх вузлів сітки, використовуючи метод послідовної верхньої релаксації

$$\begin{cases} x_{ij}^{k+1} = \frac{\omega}{4}(x_{i-1,j}^{k+1} + x_{i+1,j}^k + x_{i,j-1}^{k+1} + x_{i,j+1}^k) + (1-\omega) \cdot x_{i,j}^k, \\ z_{ij}^{k+1} = \frac{\omega}{4}(z_{i-1,j}^{k+1} + z_{i+1,j}^k + z_{i,j-1}^{k+1} + z_{i,j+1}^k) + (1-\omega) \cdot z_{i,j}^k, \end{cases} i = \overline{1, n_1 - 1}, j = \overline{1, n_2 - 1},$$

де $\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}, \quad \rho = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{n_1} + \cos \frac{\pi}{n_2}\right)}{2}.$

Уточнюємо координати «плаваючих» вузлів на межах

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x_{i0} = \frac{1}{3}(4x_{i1} - x_{i2}), \\ z_{i0} = 0. \end{cases}$$

Координати вузлів $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ обчислюються за алгоритмом, який забезпечує максимальну конформність сітки, зокрема близькість кута між лініями межі та сітки до прямого.

Отримана конформна сітка є гідродинамічною, тобто розв'язком задачі фільтрації (8) – (10) (рис. 2).

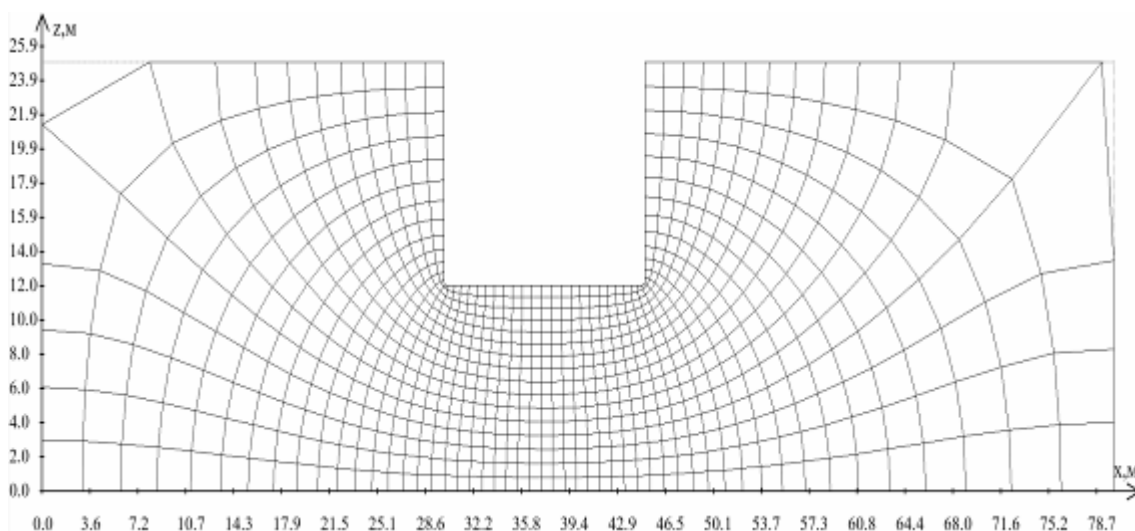


Рисунок 2 – Конформна та гідродинамічна сітка області фільтрації

Для визначення значень напорів у кожній точці ґрунту основи перейдемо в рівнянні (8) до змінних ξ, η , а саме

$$\xi = \xi(x, z), \eta = \eta(x, z). \quad (11)$$

З урахуванням умов Коші – Рімана маємо

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial z}, \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (12)$$

Підставивши формулу (11) у (8), отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Урахувавши те, що $\xi(x, z)$ та $\eta(x, z)$ – спряжені гармонічні функції, матимемо

$$\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \right) = 0, \quad (14)$$

або

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} = 0. \quad (15)$$

Оскільки функція H стала при $\xi = const$, то $\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} = 0$ і рівняння (15) спроститься

до вигляду

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} = 0. \quad (16)$$

Умови (9) у змінних ξ, η набудуть вигляду

$$H|_{\xi=0} = H_1, \quad H|_{\xi=n_1} = H_2. \quad (17)$$

Розв'язком задачі (16), (17) є лінійна функція

$$H = H_1 + \frac{\xi}{n_1} (H_2 - H_1). \quad (18)$$

Оскільки $h_\xi = 1$, то значення напорів у вузлах сітки дорівнюють

$$H_{ij} = H_1 + \frac{i}{n_1} (H_2 - H_1), i = \overline{0, n_1}, j = \overline{0, n_2}. \quad (19)$$

Знайдемо похідні функції напорів у вузлах, оскільки саме похідні потрібні для знаходження зміщень:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}. \quad (20)$$

Ураховуючи формулу (18), матимемо

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{1}{n_1} (H_2 - H_1), \quad \frac{\partial H}{\partial \eta} = 0. \quad (21)$$

Отже, задача фільтрації в основі гідротехнічної споруди розв'язана, а також знайдено необхідні для встановлення деформацій похідні напірної функції.

Для знаходження зміщень у ґрунті основи необхідно розв'язати систему рівнянь (1) – (7). Виразимо напруження через зміщення

$$\tau_{xz} = \mu \varepsilon_{xz} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (22)$$

Згідно з формулою (4), $u|_{x=0} = u|_{x=r} = 0$, тому $\frac{\partial u}{\partial z}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial z}|_{x=r} = 0$, отже, формула (5) набуде вигляду

$$\frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=r} = 0. \quad (23)$$

Відомі формули [7]

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xz} n_x n_z, \quad \tau_n = \sqrt{P_x^2 + P_z^2 - \sigma_n^2}, \quad (24)$$

де $P_x = \sigma_x n_x + \tau_{xz} n_z$, $P_z = \tau_{zx} n_x + \sigma_z n_z$ – складові вектора напружень;

n_x, n_z – напрямні косинуси вектора нормалі до верхньої межі Ω , а саме:

$n_x = -\sin \alpha$, $n_z = \cos \alpha$, де $\alpha = \arctg(l'(x))$.

Урахувавши формулу (24) і виразивши напруження через зміщення, з формули (7) отримаємо

$$\left(2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) n_x n_z + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) (n_x^2 - n_z^2) \right) \Big|_{(x,z) \in A_2 \cup A_3} = 0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \left((\lambda(n_x^2 + n_z^2) + 2\mu n_x^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda(n_x^2 + n_z^2) + 2\mu n_z^2) \frac{\partial w}{\partial z} + \right. \\ & \left. + \mu n_x n_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \Big|_{(x,z) \in A_2 \cup A_3} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Для розв'язання задачі з визначення вертикальних і горизонтальних зміщень перейдемо до змінних ξ, η , а саме

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{J_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \\ & \left. + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right) = \gamma_w \frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{J_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \\ & \left. + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) = \gamma_{sb} + \gamma_w \frac{\partial H}{\partial z}, \end{aligned} \quad (28)$$

де $J_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2$ – якобіан оберненого відображення.

Аналогічні перетворення здійсимо також у граничних умовах.

Отримані рівняння (27), (28) дискретизували на шаблоні типу «ящик» та знаходили їх розв'язок ітераційним методом Гауса – Зейделя

$$u_{ij}^{s+1} = (a_{1,ij}u_{i-1,j}^{s+1} + a_{2,ij}u_{i+1,j}^s + a_{3,ij}u_{ij-1}^{s+1} + a_{4,ij}u_{ij+1}^s) - a_{5,ij}(u_{i+1,j+1}^s - u_{i-1,j+1}^{s+1} + u_{i+1,j-1}^{s+1} + u_{i-1,j-1}^{s+1}) - a_{6,ij}, \quad (29)$$

де

$$a_{1,ij} = \frac{A_{1,ij} - C_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{2,ij} = \frac{A_{1,ij} + C_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{3,ij} = \frac{B_{1,ij} - D_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{4,ij} = \frac{B_{1,ij} + D_{1,ij}}{a_{0,ij}},$$

$$a_{5,ij} = \frac{E_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{6,ij} = \frac{F_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{0,ij} = \frac{2(\lambda + 3\mu)}{J_1 h^2}$$

$$w_{ij}^{s+1} = (b_{1,ij}w_{i-1,j}^{s+1} + b_{2,ij}w_{i+1,j}^s + b_{3,ij}w_{ij-1}^{s+1} + b_{4,ij}w_{ij+1}^s) - b_{5,ij}(w_{i+1,j+1}^s - w_{i-1,j+1}^{s+1} + w_{i+1,j-1}^{s+1} + w_{i-1,j-1}^{s+1}) - b_{6,ij}, \quad (30)$$

де

$$b_{1,ij} = \frac{A_{2,ij} - C_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{2,ij} = \frac{A_{2,ij} + C_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{3,ij} = \frac{B_{2,ij} - D_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{4,ij} = \frac{B_{2,ij} + D_{2,ij}}{b_{0,ij}},$$

$$b_{5,ij} = \frac{E_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{6,ij} = \frac{F_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{0,ij} = \frac{2(\lambda + 3\mu)}{J_{1,ij} h^2}$$

Отримані розв'язки рівнянь (29) і (30) надають нам можливість визначити горизонтальні й вертикальні зміщення водонасиченої ґрунтової основи опори мосту при дії гідродинамічних сил фільтраційного потоку.

Для чисельного розв'язання задачі створений програмний комплекс «Shift» [8] мовою програмування C++.

Згідно з описаним алгоритмом, проведені чисельні експерименти при таких вхідних даних: $r = 80\text{м}$; $a = 30\text{м}$; $b = 45\text{м}$; $d = 12\text{м}$; $l(x) = 25\text{м}$; $H_1 = 5,0\text{м}$; $H_2 = 4,5\text{м}$; $\lambda = 10385\text{КПа}$; $\mu = 6920\text{КПа}$; $\gamma_w = 10\text{кН/м}^3$; $\gamma_{sb} = 10,5\text{кН/м}^3$.

Результати розрахунку наведені на рис. 3, 4. На рисунках 3 і 4 координати x і z вимірюються в метрах, а зміщення ґрунту основи – у сантиметрах.

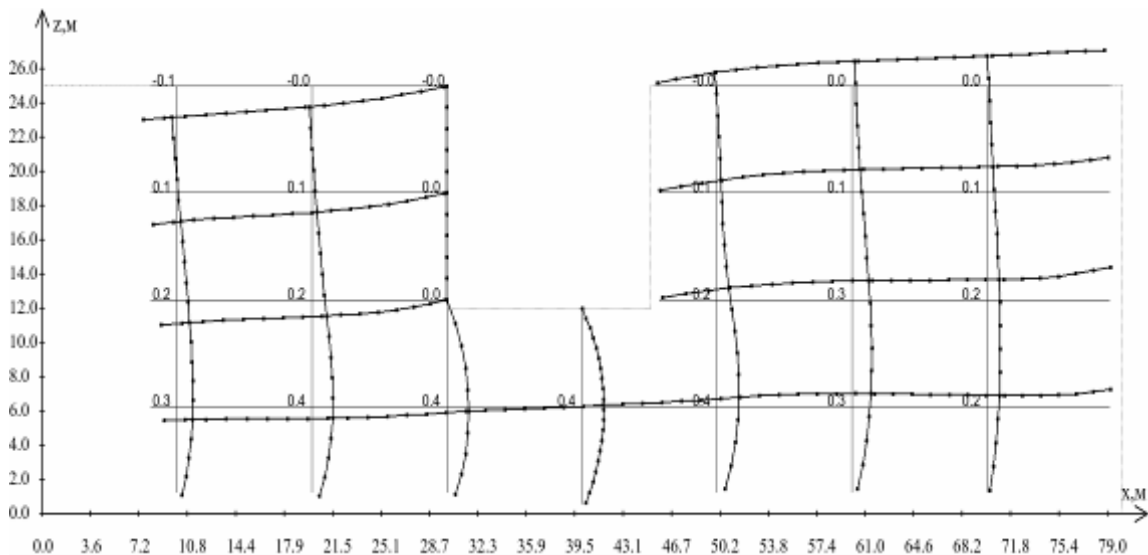


Рисунок 3 – Діаграма числових значень горизонтальних зміщень у заданих точках ґрунту основи

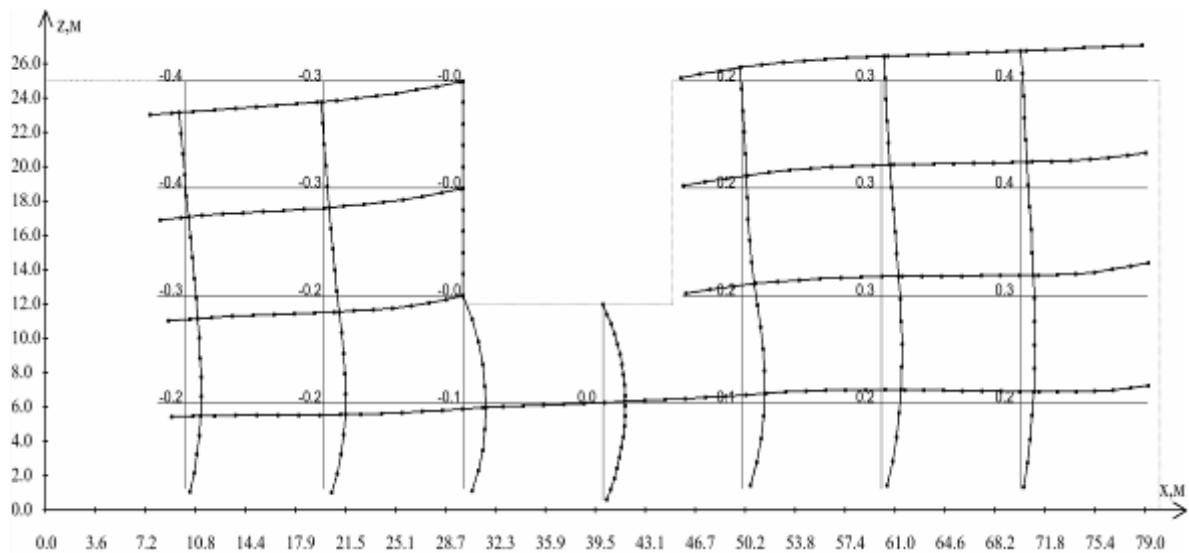


Рисунок 4 – Діаграма числових значень вертикальних зміщень у заданих точках ґрунту основи

Висновки. Розвинено й удосконалено математичні моделі з прогнозу деформацій водонасичених ґрунтових основ при дії внутрішніх об'ємних сил (гідродинамічних сил фільтраційного потоку води). Для цих математичних моделей отримано чисельні розв'язки відповідних крайових задач фільтрації та напружено-деформованого стану ґрунту, які дозволили визначити вертикальні й горизонтальні зміщення водонасичених ґрунтових основ. Проведено чисельні експерименти з дослідження вертикальних і горизонтальних зміщень водонасичених основ за наявності мостових опор на глибоководних річках.

Література

1. Кремез В. С. Моделирование фильтрации грунтовых вод на основе уточнённого уравнения Буассинеса / В. С. Кремез // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво: зб. наук. пр. – Рівне : НУВГП, 2006. – Вип. 31. – С. 160 – 165.
2. Хулбарян М. Г. Приближённое аналитическое решение задачи нестационарной фильтрации со свободной поверхностью / М. Г. Хулбарян, О. О. Юшманов // Водные ресурсы. – 1982. – Вып. №1. – С. 107 – 112.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. – М. : Наука, 1977. – 664 с.
4. Genuchten M. T. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils / M. T. Genuchten // Soil Sci. Soc. Am. J. – 1980. – № 44. – P. 892 – 898.
5. Healy R. W. A generalized solution to infiltration from surface point source / R. W. Healy, A. W. Warric // Soil. Sci. Soc. Am. J. – 1988. – № 52. – P. 1245 – 1251.
6. Thompson J. F. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies / J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, C. W. Mastin // J. Comp. Phys. – 1974. – № 15. – P. 299 – 319.
7. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К. : Наук. думка, 1991. – 432 с.
8. Кузло М. Т. Комп'ютерна програма «Модельювання деформацій водонасичених ґрунтових масивів і основ «Shift» / М. Т. Кузло, І. О. Кушнір // Свідectво про реєстрацію авторського права на твір № 53884 від 28.02.2014. – К. , 2014.

© Кузло М. Т.

Надійшла до редакції 7.12.2015