

М. Й. Заполовський, М. В. Мезенцев, М. В. Оліфір

Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", Харків, Україна

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА ПРОГРАМНО-АЛГОРИТМІЧНІ КОМПОНЕНТИ ДЛЯ СИНТЕЗУ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ КОВЗАННЯМ ЧАСТОТИ НАПРУГИ ЖИВЛЕННЯ ТАД

**Анотація. Актуальність.** При синтезі оптимальних систем керування постають ряд задач, як із розробленням моделей об'єкта управління, так і вибору методу оптимізації з подальшою реалізацією та дослідженнями отриманих законів у вигляді програмно-апаратної реалізації. **Об'єкт дослідження:** програмні компоненти для система керування тяговим електроприводом дизель-поїзда. **Мета статті:** створення програмно-алгоритмічних компонентів для системи керування тяговим приводом дизель-поїзда на основі синтезу законів управління ковзанням частоти напруги живлення тягового асинхронного двигуна. **Результати дослідження.** У статті запропоновано підхід до розв'язання задач синтезу систем керування на основі рішення загальної задачі Лагранжа та розроблено методику знаходження невизначених множників Лагранжа. На основі математичної моделі системи керування отримані аналітичні співвідношення для обчислення оптимальних керуючих впливів. Ці співвідношення інтегровані в комп'ютерну модель електромеханічної системи, розгорнуту в MATLAB/Simulink, що дозволило провести цикл віртуальних випробувань. **Висновки.** Реалізація даного підходу дозволяє розширити можливості проєктування оптимальних систем керування електроприводом змінного струму транспортних засобів. Результати моделювання демонструють, що запропонований алгоритм, реалізований у вигляді функціональних блоків Simulink, забезпечує стійку роботу приводу в усьому діапазоні тягової характеристики з оптимізацією витрати енергії. Розроблені моделі та алгоритми є готовим інструментарієм для впровадження в мікроконтролери сучасних систем автоматизації тягового електроприводу.

**Ключові слова:** програмно-алгоритмічні компоненти; тяговий електропривод; дизель-поїзд; метод Лагранжа; комп'ютерне моделювання; функціональні блоки.

### Вступ

**Постановка проблеми.** Згідно з результатами досліджень [1, 2], перспективним напрямом розвитку тягового електроприводу для залізничного транспорту, зокрема дизель-поїздів, є використання асинхронних двигунів змінного струму та спеціалізованих систем керування. Ключовим аспектом при створенні таких приводів є розробка ефективних алгоритмів керування, спрямованих на оптимізацію експлуатаційних показників, зокрема зниження енерговитрат. Сучасний підхід до реалізації таких систем передбачає використання програмно-апаратних компонентів, що дозволяють реалізувати складні алгоритми керування в реальному часі.

Одним із поширених підходів до керування асинхронним електроприводом є підтримання сталості відношення напруги живлення до її частоти ( $U/f = \text{const}$ ). Сучасна реалізація даного підходу потребує створення цифрових модулів керування, зокрема програмованих контролерів із спеціалізованими обчислювальними блоками. При цьому кругова частота напруги живлення формується відповідно до виразу:  $\omega = \omega_k + s$ , де  $\omega_k$  – кругова швидкість обертання колеса небуксуючої колісної пари;  $s$  – ковзання частоти напруги живлення ТАД, яке визначається як різниця між частотою напруги статора та електричною круговою частотою обертання ротора [3].

Як зазначається в роботах [4–6], перспективним напрямом дослідження та розробки систем керування є використання моделей, орієнтованих на специфіку функціонування ТАД при регулюванні частоти ковзання. Особливу актуальність набуває створення програмних компонентів для реалізації алгоритмів керування ковзанням, зокрема у вигляді спеціалізованих бібліотек блоків для середовищ

моделювання типу MATLAB/Simulink. Таким чином, актуальним завданням є синтез управлінь ковзанням частоти напруги живлення тягового асинхронного двигуна та їх програмна реалізація.

Регулювання цієї складової відповідно до синтезованого закону керування дозволяє оптимізувати величину напруги живлення ТАД та її частоту. Сучасна реалізація таких алгоритмів передбачає розробку програмних модулів, здатних у реальному часі обчислювати оптимальні параметри керування, забезпечуючи формування необхідного тягового моменту при мінімізації енергетичних витрат. Використання комп'ютерних компонентів дозволяє створити уніфіковану платформу для моделювання, верифікації та впровадження алгоритмів керування для сучасних систем керування рухомим складом.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Для об'єктів керування, що описуються системами диференціальних рівнянь до п'ятого порядку, ефективним інструментом синтезу керувань є методи варіаційного числення, зокрема розв'язок загальної задачі Лагранжа або використання принципу максимуму Понтрягіна [7]. У випадку систем вищого порядку може застосовуватись метод аналітичного конструювання регуляторів за критерієм узагальненої роботи. Однак аналіз методів варіаційного числення виявляє проблематику ідентифікації та визначення функцій, що формують структуру допоміжного функціоналу, що потребує розробки спеціалізованих підходів та моделей для їх коректного знаходження. Оскільки досліджуваний об'єкт керування може бути адекватно описаний системою диференціальних рівнянь не вище п'ятого порядку [6], для синтезу керувань доцільно застосувати метод варіаційного числення шляхом розв'язку загальної задачі Лагранжа. При розв'язку даної задачі використовується допоміжний функціонал виду [8]:

$$J = \int_{t_0}^T [G + \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \varphi_j(t)] dt, \quad (1)$$

де  $G$  – функціонал, який мінімізується;  $\lambda_j(t)$  – невизначені множники Лагранжа;  $\varphi_j(t)$  – диференціальні рівняння, що описують об'єкт керування.

Визначення оптимальних керувань здійснюється через розв'язок рівнянь Ейлера-Лагранжа з використанням сформованого допоміжного функціоналу. Таким чином, для успішного синтезу керувань необхідно мати математичну модель мінімізованого функціоналу та систему диференціальних рівнянь, що описують динаміку об'єкта керування.

Для експериментальної перевірки ефективності синтезованих керувань пропонується використання сучасних інструментів комп'ютерного моделювання, зокрема проведення імітаційного моделювання в середовищі MATLAB/Simulink з розробкою відповідних програмних компонентів та функціональних блоків, що реалізують запропоновані алгоритми керування [6]. Також передбачається створення бібліотеки спеціалізованих блоків для моделювання систем керування тяговим електроприводом з урахуванням специфіки регулювання ковзання та частоти живлення ТАД.

**Метою роботи** є створення програмно-алгоритмічних компонентів для системи керування тяговим приводом дизель-поїзда на основі синтезу законів керування ковзанням частоти напруги живлення тягового асинхронного двигуна. Для досягнення поставленої мети передбачається використання апарату варіаційного числення шляхом розв'язання загальної задачі Лагранжа.

Основні завдання дослідження включають:

- синтез аналітичних співвідношень для оптимального керування, спрямованих на мінімізацію енергетичних витрат під час розгону рухомого складу;
- розробку програмних компонентів та функціональних блоків для реалізації отриманих алгоритмів керування в середовищі MATLAB/Simulink;
- створення комплексної імітаційної моделі системи керування електроприводом з метою експериментального дослідження якісних характеристик системи;
- Валідацію ефективності запропонованого підходу шляхом аналізу результатів моделювання замкнутої системи керування.

Наукова новизна роботи полягає в розробці архітектури програмно-алгоритмічних компонентів системи керування, що реалізують оптимізаційні алгоритми на основі методу Лагранжа для забезпечення енергоефективної роботи тягового електроприводу.

### Основний матеріал

Для синтезу системи керування тяговим електроприводом дизель-поїзда застосовано математичну модель асинхронного двигуна у синхронній системі координат. Відмінною особливістю запропонованого підходу є визначення оптимальних керуючих впливів шляхом синтезу закону зміни ковзання, що

забезпечує мінімізацію енергетичних витрат у процесі розгону рухомого складу.

Експериментальне дослідження синтезованої системи керування проводилось на основі математичної моделі ТАД у синхронній системі координат, що була реалізована у вигляді спеціалізованих програмних компонентів у середовищі MATLAB/Simulink. Для параметризації моделі використано експлуатаційні характеристики об'єкта керування, наведені в [5, 6].

Математична модель ТАД у синхронній системі координат ( $d-q$ ), що обертається зі швидкістю  $\omega_s$ , описується системою рівнянь електричних кіл статора та ротора [4]:

$$\begin{cases} \frac{d\Psi_{s1}}{dt} = U_{s1} - a_s \Psi_{s1} + a_s k_R \Psi_{r1} + \Psi_{s2} \omega_s; \\ \frac{d\Psi_{s2}}{dt} = U_{s2} - a_s \Psi_{s2} + a_s k_R \Psi_{r2} - \Psi_{s1} \omega_s; \\ \frac{d\Psi_{r1}}{dt} = -a_r \Psi_{r1} + a_r k_s \Psi_{s1} + (\omega_s - \omega) \Psi_{r2}; \\ \frac{d\Psi_{r2}}{dt} = -a_r \Psi_{r2} + a_r k_s \Psi_{s2} - (\omega_s - \omega) \Psi_{r1}; \\ M = \frac{3}{2} p \frac{k_R}{\sigma L_S} (\Psi_{r1} \Psi_{s2} - \Psi_{s1} \Psi_{r2}); \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{p}{J} (M - M_c), \end{cases} \quad (2)$$

де  $\omega_s$  – кутова частота напруги живлення статора ТАД при  $p = 1$ ;  $\omega$  – кутова швидкість ротора;  $\Psi_{s1}$ ,  $\Psi_{s2}$ ,  $\Psi_{r1}$ ,  $\Psi_{r2}$ ,  $U_{s1}$ ,  $U_{s2}$  – відповідно проекції векторів потоків статора і ротора та напруги живлення на осі координат;  $k_s$  і  $k_r$  – коефіцієнти електромагнітного зв'язку відповідно статора та ротора;

$$L_s = L_m + L_{\sigma s}, \quad L_r = L_m + L_{\sigma r}, \quad k_s = \frac{L_m}{L_s}, \quad k_r = \frac{L_m}{L_r},$$

$$\sigma = 1 - k_r k_s = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}, \quad T_s = \frac{L_s}{r_1}, \quad T_r = \frac{L_r}{r_2}, \quad a_s = \frac{1}{\sigma T_s},$$

$$a_r = \frac{1}{\sigma T_r}; \quad L_r, L_m, L_s, r_1, r_2 — \text{параметри схеми}$$

заміщення ТАД;  $T_s$  і  $T_r$  – відповідно електромагнітна постійна часу статора та ротора;  $\sigma$  – повний коефіцієнт розсіювання;  $p$  – постійний коефіцієнт ТАД (кількість пар полюсів);  $J$  – момент інерції.

Змінні по осям  $U_{s1}$  і  $U_{s2}$  визначаються рівняннями (для випадку синусоїдального виду напруги на статорі ТАД):

$$U_{s1} = U_M \cos[(\omega_s - \omega_K)t + \varphi_K];$$

$$U_{s2} = U_M \sin[(\omega_s - \omega_K)t + \varphi_K],$$

де  $U_M$  – амплітуда першої гармоніки фазної напруги на статорі ТАД;  $\omega_K$  – кутова швидкість обертання осей координат;  $\varphi_K$  – початкова фаза напруги живлення.

У випадку синхронного обертання осей  $\omega_s = \omega_K$  і початкова фаза  $\varphi_K = 0$ , то функції за-

данню напруги – це постійне значення напруги живлення величиною  $U_M$  по осі  $S_1$  і нульове по осі  $S_2$ .

Рівняння для моделювання електромагнітного моменту:

$$M = \frac{3}{2} p \frac{k_R}{\sigma L_S} (\Psi_{r1} \Psi_{s2} - \Psi_{s1} \Psi_{r2}). \quad (3)$$

де  $\sigma$  – постійне значення коефіцієнта, яке визначаються електричними параметрами схеми заміщення ТАД. Систему рівнянь (2) і рівняння (3) використано для розроблення комп'ютерної моделі в середовищі пакету MATLAB/Simulink для проведення досліджень та отримання якісних характеристик роботи систем керування в процесі моделювання.

Для подальших перетворень представимо систему (2) в загальному виді:

$$\dot{\Psi}_{s1} = -a_{11} \Psi_{s1} + a_{12} \Psi_{r1} + \Psi_{s2} \omega_s + U_M;$$

$$\dot{\Psi}_{s2} = -a_{21} \Psi_{s2} + a_{22} \Psi_{r2} - \Psi_{s1} \omega_s;$$

$$\dot{\Psi}_{r1} = -a_{31} \Psi_{r1} + a_{32} \Psi_{s1} + \Psi_{r2} (\omega_s - \omega);$$

$$\dot{\Psi}_{r2} = -a_{41} \Psi_{r2} + a_{42} \Psi_{s2} - \Psi_{r1} (\omega_s - \omega);$$

$$\dot{\omega} = a_2 (M - M_c);$$

$$M = a_1 (\Psi_{r1} \Psi_{s2} - \Psi_{s1} \Psi_{r2}),$$

де  $a_{11} = a_{21} = a_s$ ;  $a_{12} = a_{22} = a_s k_R$ ;  $a_{31} = a_{41} = a_r$ ;

$$a_{32} = a_{42} = a_r k_s; a_1 = \frac{3}{2} p \frac{k_R}{\sigma L_S}; a_2 = \frac{p}{J}.$$

Або в традиційному виді (фазових координат):

$$\dot{X}_1 = -a_{11} X_1 + a_{12} X_3 + X_2 \omega_s + U_M;$$

$$\dot{X}_2 = -a_{21} X_2 + a_{22} X_4 - X_1 \omega_s;$$

$$\dot{X}_3 = -a_{31} X_3 + a_{32} X_1 + X_4 (\omega_s - X_5);$$

$$\dot{X}_4 = -a_{41} X_4 + a_{42} X_2 - X_3 (\omega_s - X_5); \quad (4)$$

$$\dot{X}_5 = a_2 (M - M_c);$$

$$M = a_1 (X_2 X_3 - X_1 X_4).$$

Розглянемо випадок використання одного із найпоширенішого закону керування електроприводу змінного струму, згідно якого задання напруги живлення ТАД та її частоти  $\omega_s$  формується як  $U/f = const = U_2$ , для рішення задачі знаходження оптимальних управлінь в процесі розгону дизель-поїзда до заданої швидкості за певний час згідно заданого функціоналу шляхом рішення загальної задачі Лагранжа. В якості управлінь використаємо частоту ковзання  $U_1$  і закон керування  $U/f = U_2$ . Напругу  $U_M$  (напругу живлення ТАД) представимо як:

$$U_M = U_2 (X_5 + U_1). \quad (5)$$

В процесі синтезу управлінь розглядається задача мінімізації енергетичних витрат в процесі розгону дизель-поїзда до заданої швидкості. Для цього використано рівняння швидкості руху  $V$ .

За відсутності боксування швидкість руху пропорційна кутовій швидкості обертання ротора двигуна  $\omega$ . Рівняння руху має вигляд:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p}{J_T} (M_T - M_c), \quad (6)$$

де  $M_T$  – тяговий момент дизель-поїзда;  $J_T$  – момент інерції дизель-поїзда;  $M_c$  – момент опору руху;  $J_T = m R_K^2$ ;  $m$  – маса дизель-поїзда;  $R_K$  – радіус колеса. Тяговий момент дизель-поїзда (утворюють чотири ТАД):

$$M_T = 4 i M_d, \quad (7)$$

де  $i$  – передавальне число редуктора. Момент опору руху згідно правил тягових розрахунків:

$$M_c = R_K W_0 G_H = 9.8 m R_K (1.1 + 0.12V). \quad (8)$$

При розрахунковому завантаженні:

$$M_c = 1334.0 + 2.25 \omega. \quad (9)$$

Оскільки тяговий момент формується на виході редуктора, то і швидкість обертання ротора  $\omega_p$  в математичній моделі повинна враховуватися на виході редуктора в залежності від його передавального числа. В результаті рівняння руху має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_p}{dt} &= \frac{pi}{J_T} (4iM_d - 1334.3 - 2.25\omega_p) = \\ &= 0.0028 M_d - 0.00043 \omega_p - 0.254. \end{aligned} \quad (10)$$

В результаті перетворень співвідношень (4) система рівнянь об'єкта керування в загальному плані для рішення задачі оптимізації буде мати вигляд:

$$\dot{X}_1 = -a_{11} X_1 + a_{12} X_3 + X_2 (X_5 + U_1) + U_2 (X_5 + U_1);$$

$$\dot{X}_2 = -a_{21} X_2 + a_{22} X_4 - X_1 (X_5 + U_1);$$

$$\dot{X}_3 = -a_{31} X_3 + a_{32} X_1 + X_4 U_1; \quad (11)$$

$$\dot{X}_4 = -a_{41} X_4 + a_{42} X_2 - X_3 U_1;$$

$$\dot{X}_5 = a_5 M_d - a_6 X_5 - a_7,$$

де  $M_d = a_1 (X_2 X_3 - X_1 X_4)$ ;  $a_5 = 0.0028$ ;  $a_7 = 0.254$ ;  $a_6 = 0.00043$ .

Рішення задачі розглянемо для знаходження управлінь  $U_1$  і  $U_2$  при їх одночасній зміні. Система рівнянь для рішення загальної задачі Лагранжа має вигляд:

$$\dot{X}_1 + a_{11} X_1 - a_{12} X_3 - X_2 (X_5 + U_1) - U_2 (X_5 + U_1) = 0;$$

$$\dot{X}_2 + a_{21} X_2 - a_{22} X_4 + X_1 (X_5 + U_1) = 0;$$

$$\dot{X}_3 + a_{31} X_3 - a_{32} X_1 - X_4 U_1 = 0;$$

$$\dot{X}_4 + a_{41} X_4 - a_{42} X_2 + X_3 U_1 = 0; \quad (12)$$

$$\dot{X}_5 - a_5 M_d + a_6 X_5 + a_7 = 0;$$

$$M_d = a_1 (X_2 X_3 - X_1 X_4).$$

Допоміжний функціонал:

$$J = \int_{t_0}^T [G + \sum_{j=1}^5 \lambda_j(t) \varphi_j(t)] dt, \quad (13)$$

де  $G = K(X_5 + U_1)^2$ ,  $K$  – відповідне значення константи (*const*) закону керування.

Згідно методу рішення загальної задачі Лагранжа, допоміжне рівняння  $H$  для знаходження управління  $U_1$ , має вигляд:

$$H = K(X_5 + U_1)^2 + \lambda_1(\dot{X}_1 + a_{11}X_1 - a_{12}X_3 - X_2(X_5 + U_1) - U_2(X_5 + U_1)) + \lambda_2(\dot{X}_2 + a_{21}X_2 - a_{22}X_4 + X_1(X_5 + U_1)) + \lambda_3(\dot{X}_3 + a_{31}X_3 - a_{32}X_1 - X_4U_1) + \lambda_4(\dot{X}_4 + a_{41}X_4 - a_{42}X_2 + X_3U_1) + \lambda_5(\dot{X}_5 - a_8(X_2X_3 - X_1X_4) + a_6X_5 + a_7). \quad (14)$$

На основі функції  $H$  (14) відносно функцій  $U_1$ ,  $X_j$ ,  $\lambda_j$  складаються рівняння Ейлера ( $j = \overline{1,5}$ ):

$$\frac{\partial H}{\partial U_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{U}_i} = 0. \quad (15)$$

Тут в рівнянні (15) під  $U_i$  розуміються функції  $U_j$ ,  $X_j$ ,  $\lambda_j$ . В результаті отримаємо систему рівнянь за кількістю невідомих  $U_j(t)$ ,  $X_j(t)$ ,  $\lambda_j(t)$ ,  $j = \overline{1,n}$ . Використовуючи співвідношення (13) знаходимо управління  $U_1$ :

$$U_1 = \frac{\lambda_1(X_2 + U_2) - \lambda_2X_1 + \lambda_3X_4 - \lambda_4X_3}{2K}. \quad (16)$$

Система диференціальних рівнянь для знаходження фазових змінних  $X_j$  згідно (12) для ТАД з електричними параметрами та коефіцієнтами

$$L_m = 0.09172 \text{ (мГн)}; L_r = 0.092819 \text{ (мГн)};$$

$$L_s = 0.093331 \text{ (мГн)}; R_r = 0.0676 \text{ (Ом)};$$

$$R_s = 0.0831 \text{ (Ом)}; p/J = 0.000051; i = 3.69; p = 3;$$

$$k_s = \frac{L_m}{L_s} = 0.9827; k_r = \frac{L_m}{L_r} = 0.9882;$$

$$\sigma = 1 - k_s k_r = 0.0289; T_s = \frac{L_s}{\sigma} = 1.123; T_r = \frac{L_r}{R_r} = 1.373;$$

$$a_s = \frac{1}{\sigma T_s} = 30.81; a_r = \frac{1}{\sigma T_r} = 25.20; a_{11} = a_s = 30.81;$$

$$a_{32} = a_{42} = a_r k_s = 24.76; a_{21} = a_s = 30.81;$$

$$a_{42} = a_r k_s = 24.76; a_{31} = a_r = 25.20; a_{12} = a_s k_r = 30.45;$$

$$a_{22} = a_{12} = 30.45; a_{41} = a_{31} = 25.20; a_1 = \frac{3}{2} p \frac{k_R}{\sigma L_s} =$$

$$= 1648.67; a_2 = p/J = 0.000051; a_5 = 0.0028;$$

$$a_6 = 0.00043; a_7 = 0.254; a_8 = 4.62$$

має вигляд:

$$\dot{X}_1 + 30.81X_1 - 30.45X_3 - X_2(X_5 + U_1) - U_2(X_5 + U_1) = 0;$$

$$\dot{X}_2 + 30.81X_2 - 30.45X_4 + X_1(X_5 + U_1) = 0;$$

$$\dot{X}_3 + 25.20X_3 - 24.76X_1 - X_4U_1 = 0;$$

$$\dot{X}_4 + 25.20X_4 - 24.76X_2 + X_3U_1 = 0; \quad (17)$$

$$\dot{X}_5 - 0.0028M_d + 0.00043X_5 + 0.254 = 0;$$

$$M_d = 1648.67(X_2X_3 - X_1X_4).$$

Система диференціальних рівнянь для знаходження множників Лагранжа  $\lambda_j$ :

$$\dot{\lambda}_1 = 30.81\lambda_1 + \lambda_2(X_5 + U_1) - 24.76\lambda_3 + 4.62\lambda_5X_4;$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1(X_5 + U_1) + 30.81\lambda_2 - 24.76\lambda_3 - 4.62\lambda_5X_3;$$

$$\dot{\lambda}_3 = -30.45\lambda_1 + 25.20\lambda_3 + \lambda_4U_1 - 4.62\lambda_5X_2; \quad (18)$$

$$\dot{\lambda}_4 = -30.45\lambda_2 - \lambda_3U_1 + 25.20\lambda_4 + 4.62\lambda_5X_1;$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\lambda_1(X_2 + U_2) + \lambda_2X_1 + 0.00043\lambda_5.$$

Аналіз системи рівнянь (18) та результатів імітаційного моделювання демонструє принципову неможливість отримання аналітичного розв'язку даної системи. Обчислювальна складність зумовлена наявністю в структурі моделі контуру з позитивним зворотним зв'язком, що призводить до нестійкості системи та виключає можливість прямого визначення множників Лагранжа.

Одночасно аналітичне дослідження підтверджує, що формування керуючих впливів згідно з рівняннями (16) забезпечує кореляцію між динамікою зміни ковзання та темпом розгону рухомого складу. Зокрема, з рівняння (16) випливає обернено пропорційна залежність між величиною ковзання та коефіцієнтом розгону  $K$ , що відповідає фізичній сутності процесів керування тяговим електроприводом.

У зв'язку з виявленими обчислювальними обмеженнями для вирішення задачі оптимізації запропоновано перехід до синтезу субоптимальних керувань. На основі рівнянь (17) розроблено структурну схему моделі в середовищі MATLAB, яка пройшла процедуру верифікації на предмет адекватності. Експериментальні дослідження включали порівняльний аналіз різних стратегій керування: – розімкненої системи з законом  $U/f = const$  – замкнутої системи із зворотним зв'язком за частотою напруги живлення ТАД.

Для подолання обчислювальних складнощів, пов'язаних із системою (18), запропоновано метод ідентифікації множників Лагранжа на основі аналізу динаміки електромагнітних процесів, що описуються системою диференціальних рівнянь (17). Оскільки диференціальні рівняння (18) знаходились на основі рівнянь (17), використовуючи часткові похідні згідно методики рішення загальної задачі Лагранжа, то можливо стверджувати, що і характер протікання процесів  $\lambda_j$  будуть аналогічними, як і при рішенні системи (17), де немає проблем з їх моделюванням.

На рис. 1 приведено графіки перехідних процесів при розгоні дизель-поїзда, як результати моделювання системи рівнянь (17) – фазових координат (потокочеплень)  $X_1 - X_4$  (а) та графік зміни тягового моменту дизель-поїзда (б).

Проведене моделювання дозволило провести кількісну та якісну оцінку динамічних характеристик системи. Аналіз перехідних процесів показує, що отримані залежності мають неперервний характер із чітко вираженою експоненційною компонентою, тобто вони можуть бути представлені у вигляді суми експонент та відповідних констант.

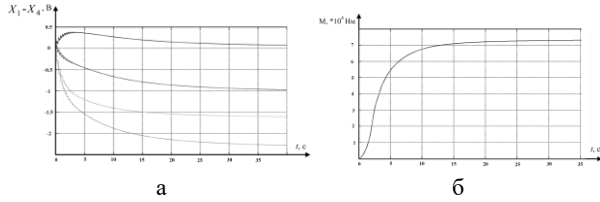


Рис. 1. Графіки зміни поточозчеплень (а) та тягового моменту ТАД (б)

Для визначення оптимальних керуючих впливів згідно з рівнянням (16) було застосовано емпіричний підхід до знаходження множників Лагранжа ( $\lambda_j$ ) із системи (18). Методологія базувалася на наступному алгоритмі: 1. Використання апріорної інформації про діапазони зміни фазових координат у рівняннях (17). 2. Врахування обмежень на величину керуючого впливу (ковзання). 3. Ітеративний пошук оптимальних значень шляхом комбінації аналітичних методів та методів перебору. 4. Валідація результатів на основі аналізу енерговитрат.

Такий підхід знаходить підтвердження в науковій літературі [8, 9] і дозволяє ефективно визначати параметри системи на основі експертних оцінок та аналізу фазових траєкторій.

Виявлення експоненційного характеру перехідних процесів дозволило спростити процедуру синтезу субоптимальних управлінь. В результаті рішення задачі знаходження управлінь (закону зміни ковзання  $U_1$ ) за умови використання темпу розгону дизель-поїзда та забезпечення при цьому мінімальних затрат енергії забезпечується безпосередньо апроксимацією функції, яку отримано в процесі моделювання.

На рис. 2 приведено графік функції закону зміни ковзання  $U_1$  та відповідні (характерні) фазові координати  $X_i$ .

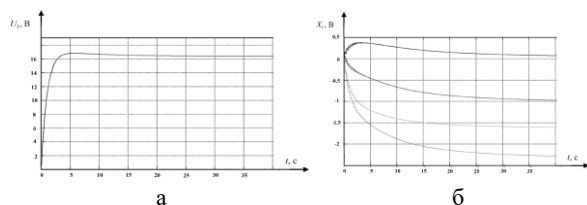


Рис. 2. Графік зміни ковзання  $U_1$  (а) та фазових координат  $X_i$  (б)

Задання функції закону зміни ковзання  $U_1$  в процесі моделювання та при технічній реалізації САР можливо у вигляді аперіодичної ланки першого порядку.

На рис. 3 приведено графік функції закону зміни ковзання  $U_1$  (а) та відповідні (характерні) фазові

координати  $X_i$  (б) за умови формування  $U_1$  згідно співвідношення (16) та фіксованому значенні  $U/f = 14$  при наступних значеннях  $\lambda_j$ :  $\lambda_1 = 36$ ;  $\lambda_2 = 60$ ;  $\lambda_3 = -120$ ;  $\lambda_4 = -120$ . Процеси знаходяться в робочому діапазоні: електрична кругова частота  $\omega_s = 261/1$  (1/сек) (41.6 Гц), напруга живлення  $U_M = 917.5$  (В) при моделюванні на 50 сек. розгону дизель-поїзда.

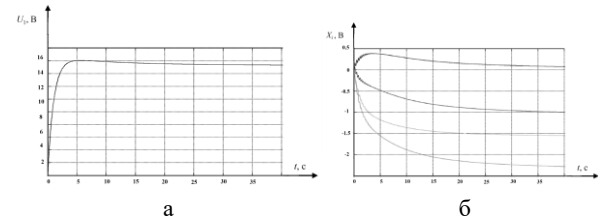


Рис. 3. Графік зміни ковзання  $U_1$  (а) та фазових змінних  $X_i$  (б)

На рис. 4 приведено графік функції закону зміни ковзання  $U_1$  (а) та графік зміни тягового моменту  $M_T$  (б) за умови формування  $U_1$  згідно співвідношення (16) та формуванні співвідношення  $U/f = var$  згідно експоненціального закону при наступних значеннях  $\lambda_j$ :  $\lambda_1 = 36$ ;  $\lambda_2 = 60$ ;  $\lambda_3 = -60$ ;  $\lambda_4 = -60$ . Процеси знаходяться в робочому діапазоні: в кінці розгону електрична кругова частота  $\omega_s = 368.9$  (1/сек) (58.7 Гц), напруга живлення  $U_M = 1022.0$  (В). При цьому значення згідно експоненціального закону  $U/f$  змінювалось від 0 до 17.35 (В\*с).

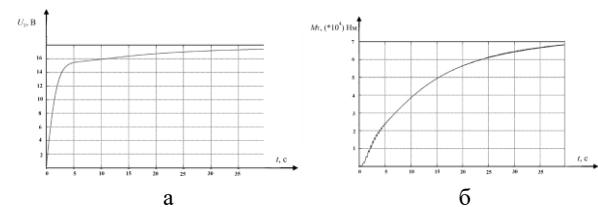


Рис. 4. Графік зміни ковзання  $U_1$  (а) та тягового моменту  $M_T$  (б)

В табл. 1 приведено результати дослідження запропонованих математичних моделей для синтезу систем керування тяговим електроприводом змінного струму дизель-поїзда за допомогою математичних моделей, які реалізовані в пакеті MATLAB. Розглянуто варіанти формування управлінь (ковзання частоти ТАД  $U_1$ ) як з використанням невизначених множників Лагранжа  $\lambda_j$  (п/п. 1-10, 14), так і формування управлінь при заданій формі відповідно до експоненціального закону (п/п. 11 - 13). Результати п/п. 14 – формування управлінь (ковзання частоти ТАД  $U_1$ ) з використанням невизначених множників Лагранжа  $\lambda_j$  та формуванні співвідношення  $U/f = var$  згідно експоненціального закону.

П/п. 1 – 8 відображають результати формування управління  $U_1$  в можливому робочому діапазоні функціонування електроприводу в процесі розгону

дизель-поїзда (від 1.16 Гц до 2.8 Гц) при використанні отриманого співвідношення на основі інформації фазових координат  $X_j$  та значень  $\lambda_j$  множників Лагранжа. Приведені результати досліджень характеризують можливий процес формування управлін

(ковзання частоти ТАД  $U_1$ ) згідно отриманих аналітичних співвідношень як для випадку  $U/f = const$ , так і для випадку  $U/f = var$  за умови забезпечення оптимізації енергетичних показників в процесі розгону.

Таблиця 1 – Результати дослідження

№ п/п	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$U_1, 1/сек$	$U/f$ В*сек	$\omega_s, 1/сек$	$U_M, В$	Примітка
1	36	60	-120	-120	17.32	18	611.4	1753.0	
2	36	60	-120	-120	17.36	16	360.1	917.5	
3	36	60	-120	-120	17.42	14	261.1	582.1	Рис. 2
4	18	60	-120	-120	11.72	18	373.9	1072.0	
5	9	60	-120	-120	9.0	18	298.9	856.6	
6	9	60	-120	-120	9.0	19	341.4	1033.0	
7	3	60	-120	-120	7.29	19	269.8	816.3	
8	3	60	-120	-120	7.30	20	307.2	978.2	
9	36	60	-60	-60	16.37	18	461.1	1322.0	
10	36	60	-60	-60	16.39	16	349.3	890.0	
11					16.0	16	347.2	884.5	
12					18.0	16	354.1	902.1	
13					20.0	16	360.6	918.8	
14	36	60	-60	-60	16.43	Експоненціальний	368.9	1022.0	Рис. 4

## Висновки

1. Розроблено комплекс програмних компонентів у середовищі MATLAB/Simulink для дослідження систем керування тяговим асинхронним електроприводом дизель-поїздів. Створено спеціалізовані бібліотеки блоків, що дозволяють моделювати динамічні характеристики системи та оптимізувати її енергоефективність.

2. Розроблено програмні модулі для синтезу оптимальної системи автоматичного регулювання електроприводу, що реалізують алгоритми формування керувань ковзанням частоти напруги живлення тягового асинхронного двигуна на основі модифікованого закону:

$$U/f=const.$$

3. Реалізовано програмні компоненти для чисельної реалізації методу варіаційного числення, що дозволяють вирішувати задачі синтезу керувань для об'єктів, що описуються системами диференціальних рівнянь п'ятого порядку.

4. Створено програмну реалізацію математичної моделі тягового електроприводу в синхронній системі координат у вигляді спеціалізованих блоків Simulink, що враховують ступінь завантаження дизель-поїзда.

5. Розроблено програмні модулі для реалізації методу Лагранжа, що включають блоки формуван

ня квадратичного функціоналу якості та алгоритми його мінімізації.

6. Створено спеціалізовані обчислювальні процедури для визначення невизначених множників Лагранжа, що реалізують стабілізуючі алгоритми для усунення проблем нестійкості диференціальних рівнянь.

7. Розроблено альтернативні програмні модулі формування керувань ковзанням частоти ТАД, що реалізують як методи на основі множників Лагранжа, так і експоненціальні закони керування.

8. Інтегровано аналітичні співвідношення для синтезу керувань у вигляді програмних блоків, що враховують номінальне навантаження дизель-поїзда для різних режимів роботи.

9. Розроблено комплекс програмних засобів верифікації моделі, що включають модулі побудови графіків фазових змінних та порівняльних таблиць ефективності різних стратегій керування.

10. Створено імітаційну модель системи керування, що дозволяє експериментально підтвердити її працездатність та енергоефективність при різних режимах розгону.

11. Розроблено архітектуру програмної платформи для подальших досліджень, що забезпечує можливість інтеграції методів експертних оцінок та машинного навчання для визначення оптимальних параметрів системи керування.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Horstmann D. 100 Jahre Entwicklung der Antriebstechnik für elektrische Bahnen. Teil 2 / D. Horstmann, R. Wagner, W-D. Weigel. *Elektrische Bahnen*. 2003. No 7. P. 338-345. URL: <https://www.researchgate.net/publication/>

2. Bose B. K. *Modern Power Electronics and AC Drives* / B. K. Bose. Prentice Hall PTR: Prentice-Hall Inc., 2002. 712 p. URL: [https://www.academia.edu/41701330/Modern\\_Power\\_Electronics\\_and\\_AC\\_Drives](https://www.academia.edu/41701330/Modern_Power_Electronics_and_AC_Drives)
3. Volkov A. V., Kosenko I. A. Asynchronous motor drive based on self-excited current inverter with switched-off thyristors and provided with predicting relay and vector regulation of stator current. *Elektrotehnika*. 2008. No 10. P. 6–17. URL: <https://link.springer.com/article/10.3103/S1068371208100039>
4. Носков В. И., Дмитриенко В. Д., Заполовский Н. И., Леонов С. Ю. Моделирование и оптимизация систем управления и контроля локомотивов. X. : Транспорт Украины, 2003. 248 с. URL: [https://scholar.google.com/scholar?hl=en&as\\_sdt=0.5&cluster=8949436925584089778](https://scholar.google.com/scholar?hl=en&as_sdt=0.5&cluster=8949436925584089778)
5. Заполовський М. Й., Мезенцев М. В., Скороделов, В. В. Математична модель для синтезу управління електроприводом змінного струму. Системи управління, навігації та зв'язку. Вип. 5(57). Полтава: Нац. ун-т «Полтавська політехніка ім. Ю. Кондратюка», 2019. С. 16–21. DOI: <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2019.5.016>
6. Заполовський М. Й., Мезенцев М. В., Баленко О. І., Оліфір М. В. Оптимізаційна модель тягового асинхронного електроприводу дизель-поїзда та її дослідження. *Системи управління, навігації та зв'язку*. Вип. 3. Полтава: Нац. ун-т «Полтавська політехніка ім. Ю. Кондратюка», 2023. С. 45–53. DOI: <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2023.3.045>
7. Толочко О. І. Моделювання електромеханічних систем. Математичне моделювання систем асинхронного електроприводу. Київ : НТУУ «КПІ», 2016. 150 с. URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/6fc21e95-34d2-4a4a-bb67-f53d0a327a4e/content>
8. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. 380 с. URI: <https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2020/05/var-book-2010.pdf>
9. Носков В.І., Гавриленко С.Ю., Скороделов В.В., Гейко М.В. Розробка методу оцінки показників тягових електропередач автономних локомотивів. *Системи управління, навігації та зв'язку*. Вип. 3 (73). Полтава: Нац. ун-т «Полтавська політехніка ім. Ю. Кондратюка», 2023. С. 54–57. DOI: <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2023.3.054>

Received (Надійшла) 15.12.2025

Accepted for publication (Прийнята до друку) 15.04.2026

Publication date (Дата публікації) 22.05.2026

## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ/ ABOUT THE AUTHORS

**Заполовський Микола Йосипович** - кандидат технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерної інженерії та програмування, Національний технічний університет України «Харківський політехнічний інститут, Харків, Україна; **Mykola Zapolovskiy** – Candidate of Technical Sciences, Professor, Professor, Department of Computer Engineering and Programming, National Technical University of Ukraine “Kharkiv Polytechnic Institute”, Kharkiv, Ukraine; e-mail: [zapolovsky@email.ua](mailto:zapolovsky@email.ua); ORCID Author ID: <http://orcid.org/0000-0002-7617-9700>; Scopus Author ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57194577942>.

**Мезенцев Микола Вікторович** – кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри комп'ютерної інженерії та програмування, Національний технічний університет України «Харківський політехнічний інститут, Харків, Україна; **Mykola Mezentsev** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Professor, Department of Computer Engineering and Programming, National Technical University of Ukraine “Kharkiv Polytechnic Institute”, Kharkiv, Ukraine; e-mail: [mykola.mezentsev@khi.edu.ua](mailto:mykola.mezentsev@khi.edu.ua) ORCID Author ID: <https://orcid.org/0000-0001-7834-2797> Scopus Author ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57210418332>.

**Оліфір Максим Вікторович** – аспірант кафедри комп'ютерної інженерії та програмування, Національний технічний університет України «Харківський політехнічний інститут, Харків, Україна; **Maksym Olifir** – PhD student, Department of Computer Engineering and Programming, National Technical University of Ukraine “Kharkiv Polytechnic Institute”, Kharkiv, Ukraine; e-mail: [Maksym.Olifir@cs.khpi.edu.ua](mailto:Maksym.Olifir@cs.khpi.edu.ua); ORCID Author ID: <https://orcid.org/0009-0008-6956-1208>.

**Mathematical model and software-algorithmic components  
for the synthesis of a slip control system of the supply-voltage frequency  
of a traction asynchronous motor**

Mykola Zapolovskiy, Mykola Mezentsev, Maksym Olifir

**Abstract. Relevance.** In the synthesis of optimal control systems, a number of tasks arise, including the development of models of the control object, the choice of an optimization method, and the subsequent implementation and investigation of the obtained control laws in the form of software-hardware solutions. **Object of research:** software components for the control system of a diesel-train traction electric drive. **Purpose of the article:** to create software-algorithmic components for the control system of a diesel-train traction drive based on the synthesis of control laws for slip of the supply-voltage frequency of a traction asynchronous motor. **Research results.** The article proposes an approach to solving problems of control-system synthesis based on the general Lagrange problem and develops a method for determining the unknown Lagrange multipliers. Based on the mathematical model of the control system, analytical relations for calculating optimal control actions are obtained. These relations are integrated into a computer model of the electromechanical system deployed in MATLAB/Simulink, which made it possible to perform a cycle of virtual tests. **Conclusions.** Implementing this approach expands the possibilities for designing optimal control systems for AC traction drives of vehicles. The simulation results demonstrate that the proposed algorithm, implemented as Simulink functional blocks, ensures stable drive operation throughout the entire traction-characteristic range with optimized energy consumption. The developed models and algorithms are ready-to-use tools for implementation in microcontrollers of modern automation systems of traction electric drives.

**Keywords:** software-algorithmic components; traction electric drive; diesel train; Lagrange method; computer simulation; functional blocks.