УДК 681.513:62-58 **doi: 10.26906/SUNZ.2026.1.202**

Л. І. Лєві, О. С. Фомін, Д. Р. Олексієнко

Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», Полтава, Україна

ОПТИМІЗАЦІЯ СТРУКТУРНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ОПЕРАТИВНО КЕРОВАНИХ ІЄРАРХІЧНО ОРГАНІЗОВАНИХ ІНЖЕНЕРНИХ МЕРЕЖНИХ СИСТЕМ

Анотація. На основі спеціальних соціологічних досліджень встановлено, що досягнення високого рівня інженерного забезпечення житлових будинків, а також побутових підприємств і установ сприяє підвищенню санітарно-гігієнічного рівня, має виключно позитивний вплив на стан здоров'я населення та на продуктивність праці, тим самим сприяючи розв'язанню важливих народногосподарських завдань. Важливим аспектом зазначеної проблеми є вдосконалення функціонування сучасних міських систем водо- та газопостачання для забезпечення необхідних режимів споживання води та газу побутовими об'єктами, а також об'єктами соціально-культурного призначення. Необхідність подальшого вдосконалення сільськогосподарського виробництва та поліпшення побутових умов сільського населення висуває підвищені вимоги до реалізації процесів функціонування зрошувальних систем, а також систем сільськогосподарського водопостачання. Це зумовлено необхідністю забезпечення потрібних режимів поливу на зрошуваних полях, а також необхідних режимів споживання води об'єктами сільськогосподарського призначення та побутовими об'єктами. Згідно з [1 – 4], системи водо- і газопостачання, а також зрошувальні та вентиляційні системи можна класифікувати як ієрархічно структуровані інженерні мережні системи (ІМС). Аналіз існуючих і проектованих ІМС свідчить про те, що такі системи можуть бути представлені у вигляді сукупності взаємопов'язаних і взаємодіючих у процесі функціонування локальних мереж (ЛМ) різних ієрархічних рівнів. Зокрема, на вищому рівні ієрархії до складу ІМС входять магістральні мережі (ММ), які об'єднують підключені до них розподільчі мережі (РМ), що належать до нижчих рівнів. Основні характеристики та специфічні властивості ЛМ різного рівня, як складових частин оперативно керованих ієрархічних інженерних мережевих систем, детально проаналізовані у роботах [1 – 4]. Виходячи з поставленої проблеми, стаття спрямована на дослідження математичних моделей і комп'ютерних реалізацій для розв'язання таких ключових задач оптимізації структурних компонентів ІМС: оптимальне прокладання магістральних каналів (МК), що формують ММ у складі оперативно керованих зрошувальних систем як різновиду ІМС; оптимізація топологічної структури окремих оперативно керованих ЛМ.

Ключові слова: інженерні мережні системи, локальні мережі, магістральні мережі, розподільчі мережі, магістральні канали, ієрархічна структура, найкоротша ланцюгова траєкторія, «поглинаючий» алгоритм.

Вступ

Постановка проблеми. Відповідно до [1 – 4], системи водо- та газопостачання, а також зрошувальні й вентиляційні системи можуть бути віднесені до класу ієрархічно організованих інженерних мережних систем (ІМС).

На підставі аналізу існуючих та проектованих ІМС можна зробити висновок, що такі об'єкти можуть бути декомпозовані на певним чином взаємопов'язані та взаємодіючі між собою у процесі функціонування окремі локальні мережі (ЛМ) різного рівня ієрархії.

При цьому реальні ІМС на вищому рівні ієрархії як ЛМ містять магістральні мережі (ММ), до яких підключені ЛМ нижчих рівнів ієрархії – розподільчі мережі (РМ).

Найважливіші властивості та особливості, характерні для окремих ЛМ різного рівня ієрархії як структурних елементів оперативно керованих ієрархічно організованих інженерних мережних систем розглянуто в [1 – 4].

Формулювання мети статті. Відповідно до постановки проблеми, розглянемо математичні моделі та комп'ютерні реалізації наступних задач оптимізації найважливіших структурних елементів ІМС:

- оптимізація трасування магістральних каналів (МК) як ММ оперативно керованих зрошувальних систем у якості ІМС;
- оптимізація топологічної структури окремих оперативно керованих ЛМ.

Оптимізація трасування магістральних каналів оперативно керованих зрошувальних систем

Нехай необхідно від заданого пункту споживання цільового продукту (ЦП) (води) із зовнішнього середовища побудувати магістральний канал (МК) зрошувальної системи до однієї з кількох можливих вершин розподільчої системи (РС), що знаходиться на наступному, нижчому рівні ієрархії. Для забезпечення подачі ЦП буде потрібно певна кількість насосних станцій, які є активними елементами (АЕ) оперативно керованої зрошувальної системи.

Кожен АЕ може розташовуватись на одній із доступних для будівництва ділянок місцевості. Обмеження в даному випадку можуть бути зумовлені складними фізико-географічними умовами місцевості, наявністю інших споруд, а також міркуваннями, пов'язаними з охороною навколишнього середовища [1 – 4].

Передбачається, що для будь-якої пари суміжних АЕ відомі витрати на спорудження інцидентної їм частини можливого варіанта МК зрошувальної системи.

Задача оптимізації трасування магістрального каналу (МК) оперативно керованої зрошувальної системи, що розглядається в цій роботі, формулюється таким чином.

Необхідно при заданому розташуванні пунктів споживання ЦП з зовнішнього середовища визначити таке допустиме розміщення активних елементів

 © Лєві Л. І., Фомін О. С., Олексієнко Д. Р., 2026

(АЕ), яке мінімізує загальні витрати на будівництво МК зрошувальної системи.

З метою формалізації поставленої на змістовному рівні задачі введемо такі позначення.

Мережу можливих варіантів магістрального каналу (МК) подамо за допомогою моделюючого графа G, який має множину вершин V і дуг E, де кожна дуга $e \in E$ відповідає впорядкованій парі вершин (i, j), де $i, j \in V$.

Вершину, що відповідає пункту споживання ЦП із зовнішнього середовища МК зрошувальної системи, позначимо як S і назвемо її головним джерелом.

Вершину розподільчої мережі з множини можливих вершин, до якої передбачається підключення МК, позначимо як t і назвемо її головним стоком.

Кожній дузі e поставимо у відповідність величину C_{ij}, що виражає вартість будівництва частини МК, яка з'єднує відповідні вузли мережі можливих варіантів.

У цій формалізації задача оптимізації трасування МК оперативно керованої зрошувальної системи зводиться до задачі знаходження найкоротшого шляху з вершини S до вершини t на моделюючому графі G [1 – 4].

Машинні програми, що чисельно реалізують цю задачу, базуються на алгоритмі Дейкстри, який враховує специфіку розглядуваної моделі [1 – 4].

Основу алгоритму становить положення про те, що якщо відома найкоротша ланцюгова траєкторія з вузла S до вершини j і вершина K належить цій траєкторії, то найкоротша траєкторія з S до K є частиною початкової траєкторії, що закінчується у вузлі K. Ініціалізація алгоритму здійснюється при $j=S$, далі значення j поетапно збільшується на одиницю, і при $j=t$ алгоритм завершує роботу.

Призначення програми, що реалізує алгоритм Дейкстри, полягає у знаходженні найкоротшого шляху від джерела до будь-якого іншого вузла мережі.

Оптимізація топологічної структури оперативно керованих локальних мереж

Відповідно до [1 – 4], оптимізація топологічної структури оперативно керованих ЛС повинна здійснюватися з урахуванням наступних техніко-економічних умов:

1. Мінімізація загальних витрат на спорудження ЛС.

2. Мінімізація загальних витрат на експлуатацію ЛС.

Мінімізація загальних витрат на спорудження ЛС може бути досягнута шляхом реалізації наступних заходів [1 – 4]:

1. Мінімізація обсягу будівельних робіт.

2. Мінімізація витрат будівельних і конструкційних матеріалів.

Мінімізація загальних витрат на експлуатацію ЛС може бути досягнута шляхом реалізації наступних умов [1 – 4]:

1. Мінімізація загальної кількості елементів (ділянок) розглядуваної ЛС.

2. Мінімізація загальних енергетичних втрат при транспортуванні ЦП по ділянках і його перерозподілі в вузлах розглядуваної ЛС.

У цьому підрозділі розглянемо можливий підхід до оптимізації топологічної структури оперативно керованих ЛС, що враховує перераховані вимоги. В цьому сенсі розглядуваний підхід є логічним продовженням та розвитком підходу до оптимізації трасування МК оперативно керованих зрошувальних систем, наведеного в попередньому підрозділі цієї роботи.

Аналіз існуючих та проектованих ЛС дозволяє зробити висновок, що для об'єктів розглядуваного класу зазвичай відоме розташування вузлів (вершин), в яких з'єднуються їхні ділянки (дуги) [1 – 4]. Для реалізації свого функціонального призначення та задоволення перерахованим вимогам, проектована ЛС повинна мати такі властивості:

1. Бути зв'язною.

2. Містити всі задані вузли (вершини).

3. Містити мінімальну кількість ділянок (дуг).

4. Мінімізувати суму узагальнених вартісних оцінок (узагальнених довжин) цих дуг.

На основі теоретико-графового аналізу, проведеного відповідно до [1 – 4], можна зробити висновок, що ЛМ, що мають зазначені властивості, можуть бути формалізовані як найкоротші остовні дерева. Тому для оптимізації топологічної структури оперативно керованих ЛМ пропонується використовувати відому задачу про найкоротше остовне дерево.

Постановка цієї задачі відповідно до [1 – 4] передбачає наступну формалізацію. Виділимо в ІМС певну ЛМ M, яку формалізуємо остовним деревом T, що має n вершин, які належать множині S. Вершини остовного дерева T відповідають вузлам ЛМ M.

Остовним деревом T називається зв'язний граф, що складається з $n-1$ дуг і n вершин. Дуги дерева T відповідають ділянкам ЛМ M.

З будь-якої власної підмножини множини S може бути утворено дерево, яке, однак, може не бути остовним деревом початкової ЛМ M.

Припустимо, що кожній дузі (i, j), що з'єднує вершини i та j ЛС M, відповідає величина $C_{i,j}$, яка виражає узагальнену вартісну оцінку (узагальнену довжину) розглядуваної дуги (i, j), породжувану загальними витратами на спорудження та експлуатацію відповідної ділянки ЛМ M, де $i, j \in S$.

Найкоротшим остовним деревом називається таке остовне дерево ЛМ M, яке має мінімальну суму узагальнених вартісних оцінок $C_{i,j}$ усіх його дуг (i, j), де $i, j \in S$.

Множина можливих варіантів топологічної структури розподільчої мережі (РМ) зрошувальної системи приведена на рис. 1.

Відповідно до [5, 6], задача про найкоротше остовне дерево є задачею дослідження операцій, яку можна розв'язати за допомогою «поглинаючого» алгоритму. Цей процес починається з вибору довільної вершини ЛМ M і найкоротшої дуги з множини дуг, що з'єднують вибрану вершину з іншими вершинами.

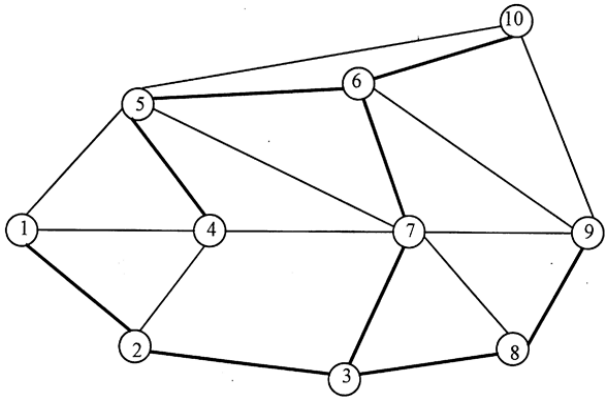

Рис. 1. Множина можливих варіантів топологічної структури розподільчої мережі зрошувальної системи

Після з'єднання двох вершин вибраною дугою визначається найближча вершина до цих двох. Потім ця вершина та відповідна їй дуга додаються до шуканого остовного дерева. Зазначений процес триває доти, доки всі вершини не буде з'єднано між собою.

Алгоритм, заснований на «поглинанні» найкоротших дуг, згідно з [5, 6], може бути формалізований таким чином.

1. Використовуючи вершини дерева T, визначаються такі дві множини: S – множина з'єднаних вершин, $\overline{S}$ – множина нез'єднаних вершин. На початку всі вершини належать множині $\overline{S}$.

2. Вибирається довільна вершина з множини $\overline{S}$ і з'єднується з найближчою сусідньою вершиною. Після виконання цього кроку множина $\overline{S}$ міститиме дві вершини.

3. Серед усіх дуг, що з'єднують вершини множини S з вершинами множини $\overline{S}$, обирається найкоротша дуга. Кінцева вершина цієї дуги, що належить множині $\overline{S}$, позначається як δ. Вершину δ видаляють з множини $\overline{S}$ і додають до множини S.

4. Крок 3 виконується доти, доки всі вершини не належатимуть множині S.

Узагальнені вартісні оцінки дуг мережі можливих варіантів топологічної структури РМ зрошувальної системи, топологічна структура якої формалізована за допомогою рис. 1, наведено в табл. 1.

Узагальнені вартісні оцінки дуг мережі оптимального варіанту топологічної структури РМ зрошувальної системи, топологічна структура якої формалізована за допомогою рис. 1 та узагальнені вартісні оцінки дуг мережі можливих варіантів топологічної структури РМ зрошувальної системи містяться в табл. 1, наведено в табл. 2.

Висновки

1. Для оптимізації трасування МК в оперативно керованих зрошувальних системах доцільно використати задачу знаходження найкоротшого ланцюга на моделюючому графі можливих варіантів трасування МК. Для синтезу машинних програм пакету мережевої оптимізації, призначеного для чисельної реалізації поставлених задач, доцільно застосувати алгоритм Дейкстри з урахуванням специфіки даних задач.

Таблиця 1 – **Узагальнені вартісні оцінки дуг мережі можливих варіантів топологічної структури РМ зрошувальної системи**

(i, j)	C_{ij}	(i, j)	C_{ij}
(1, 2)	2,1	(5, 6)	1,2
(1, 4)	2,7	(5, 7)	2,1
(1, 5)	3,6	(5, 10)	3,3
(2, 3)	1,2	(6, 7)	1,5
(2, 4)	1,8	(6, 9)	2,7
(3, 4)	2,1	(6, 10)	1,2
(3, 7)	0,6	(7, 8)	2,7
(3, 8)	1,8	(7, 9)	2,4
(4, 5)	1,8	(8, 9)	0,9
(4, 7)	3,0	(9, 10)	3,0

Таблиця 2 – **Узагальнені вартісні оцінки дуг мережі оптимального варіанту топологічної структури РМ зрошувальної системи**

(i, j)	C_{ij}	(i, j)	C_{ij}
(1, 2)	2,1	(5, 6)	1,2
(2, 3)	1,2	(6, 7)	1,5
(3, 7)	0,6	(6, 10)	1,2
(3, 8)	1,8	(8, 9)	0,9
(4, 5)	1,8	-	-

З метою оптимізації топологічної структури оперативно керованих ЛМ, що є складовою частиною ієрархічно організованих ІМС, з урахуванням вимог до їхньої конструкції та експлуатації, доцільно використати задачу про найкоротше остовне дерево. Відтак, для реалізації цього підходу доцільно застосувати програмний пакет мережевої оптимі-

зації, який ефективно виконує розв'язання зазначеної задачі за допомогою «поглинаючого» алгоритму.

Конфлікт інтересів. Автори декларують, що не мають конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Використання засобів штучного інтелекту. Автори підтверджують, що не використовували технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Список літератури

1. Лєві Л.І. Застосування комбінаторно-графового підходу до оперативного управління інженерними мережами / Л.І. Лєві, М.К. Бороздін, О.С. Ястреба // Системи управління, навігації та зв'язку. Зб. наукових праць. Вип. 2 (76), 2024. – С. 44–46. http://doi.org/10.26906/SUNZ.2024.2.044
2. Поліщук Д. О., Яджак М. С. Мережеві структури та системи: Ієрархії та мережі // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2018. – № 4. https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2018.4.07
3. Robson C., Barr S., Ford A. The structure and behaviour of hierarchical infrastructure networks // Applied Network Science, 2021, 6:65. https://doi.org/10.1007/s41109-021-00404-4
4. Wang C., Huang N., Zhang S. та ін. A hierarchical network model for network topology design using genetic algorithm // MATEC Web of Conferences (2017), Vol. 119. https://doi.org/10.1051/matecconf/201711901008
5. Hillier, F. S., Lieberman, G. J. (2021). Introduction to Operations Research (11th ed.). McGraw-Hill. URL: https://www.mheducation.com/highered/product/introduction-operations-research-hillier/M9781259872999.html
6. Korte, B., Vygen, J. (2022). Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms (6th ed.). Springer. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-662-56074-5

Received (Надійшла) 25.11.2025
Accepted for publication (Прийнята до друку) 04.02.2026
Publication date (Дата публікації) 27.02.2026

Відомості про авторів / About the Authors

Лєві Леонід Ісаакович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри автоматики, електроніки та телекомунікацій, Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», Полтава, Україна;
Leonid Lievi – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of Department of Automation, Electronics and Telecommunications, National University «Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic», Poltava, Ukraine;
e-mail: levili@ukr.net; ORCID Author ID: https://orcid.org/0000-0003-4619-8764;
Scopus Author ID: https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=58632914200.

Фомін Олександр Сергійович – кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматики, електроніки та телекомунікацій, Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», Полтава, Україна;
Olexandr Fomin - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Automation, Electronics and Telecommunications, Yuriy Kondratyuk Poltava Polytechnic National University, Poltava, Ukraine;
e-mail: olexandr.fomin@nupp.edu.ua**;** ORCID Author ID: https://orcid.org/0009-0005-3487-9062.

Олексієнко Денис Русланович – аспірант кафедри автоматики, електроніки та телекомунікацій Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», Полтава, Україна;
Denis Oleksiienko - postgraduate of the Department of Automation, Electronics and Telecommunications, National University «Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic», Poltava, Ukraine.
e-mail: denqueeisafk@gmail.com; ORCID Author ID: https://orcid.org/0009-0002-5066-0421.

Optimization of structural elements of operationally controlled hierarchically organized engineering network systems

Leonid Lievi, Olexandr Fomin, Denis Oleksiienko

Abstract. Based on special sociological research, it has been established that achieving a high level of engineering support for residential buildings, as well as household enterprises and institutions, contributes to improving the sanitary and hygienic level, has an exclusively positive effect on the health of the population and on labor productivity, thereby contributing to the solution of important national economic tasks. An important aspect of this problem is the improvement of the functioning of modern urban water and gas supply systems to ensure the necessary modes of water and gas consumption by household objects, as well as objects of socio-cultural purpose. The need to further improve agricultural production and improve the living conditions of the rural population puts forward increased requirements for the implementation of the processes of functioning of irrigation systems, as well as agricultural water supply systems. This is due to the need to ensure the necessary irrigation modes on irrigated fields, as well as the necessary modes of water consumption by agricultural objects and household objects. According to [1 – 4], water and gas supply systems, as well as irrigation and ventilation systems, can be classified as hierarchically structured engineering network systems (ENS). Analysis of existing and designed ENS shows that such systems can be represented as a set of interconnected and interacting local networks (LN) of different hierarchical levels that function. In particular, at the highest level of the hierarchy, the ENS includes trunk networks (TN), which unite the distribution networks (DN) connected to them, belonging to lower levels. The main characteristics and specific properties of LNs of different levels, as components of operationally managed hierarchical engineering network systems, have been analyzed in detail in the works [1 – 4]. Based on the problem posed, the article is aimed at studying mathematical models and computer implementations to solve the following key tasks of optimizing the structural components of ENS: optimal laying of main channels (MC) that form TNs as part of operationally controlled irrigation systems as a type of ENS; optimization of the topological structure of individual operationally controlled LNs.

Keywords: engineering network systems, local networks, backbone networks, distribution networks, backbone channels, hierarchical structure, shortest chain trajectory, "absorbing" algorithm.