

С. І. Клівець<sup>1</sup>, Г. Я. Криховецький<sup>2</sup>, Т. В. Кулешова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна

<sup>2</sup> Науково-дослідний інститут воєнної розвідки, Київ, Україна

## СИНТЕЗ МЕРЕЖІ ЗВ'ЯЗКУ КЛАСТЕРА ТУМАННОГО ШАРУ ВИСОКОЩІЛЬНОГО ПРОМИСЛОВОГО ІНТЕРНЕТУ РЕЧЕЙ

**Анотація.** У промислових умовах туманний шар є важливою складовою екосфери Інтернету речей для забезпечення безперервності технологічних процесів та дотримання вимог до надійності й відмовостійкості. Але обмежені ресурси пристроїв туманного шару призводять до зростання затримок обробки, черг, втрати даних або деградації сервісу, особливо при високій щільності туманних пристроїв на обмеженій території. Дані виклики можуть бути суттєво зменшені при формуванні оптимальної мережі зв'язку між туманними пристроями, об'єднаними в єдиний кластер. **Метою** цього дослідження є розробка аналітичного рішення для оптимізації пропускну здатності при передачі даних в туманних IoT мережах з високою щільністю вузлів на базі відповідної математичної моделі процесу обміну даними між шарами IoT.. **Отримані такі результати.** Розроблена математична модель, що визначає характеристики каналів зв'язку між туманними пристроями. Сформульована оптимізаційна задача, що визначає оптимальні значення щільності інформаційного потоку, які мінімізують середню затримку мережі зв'язку з обмеженням за вартістю послуг. Рішення цієї задачі знайдено за допомогою використання невизначених множників Лагранжа. В результаті знайдені значення оптимальних потоків всередині туманного кластера між його пристроями. **Висновки.** Знайдені значення оптимальних потоків всередині туманного кластера між його пристроями, що дозволяє синтезувати оптимальну мережу зв'язку за критерієм мінімізації затримки передачі інформаційних пакетів.

**Ключові слова:** високощільний промисловий Інтернет речей, туманний шар, обчислювальні ресурси, затримка пакета, черга.

### Вступ

Високощільний промисловий Інтернет речей (PoT) характеризується великою кількістю взаємопов'язаних датчиків та виконавчих пристроїв у обмеженому просторі [1]. Наслідком такої топології є значне збільшення обсягу переданої інформації за одиницю часу. Це висуває підвищені вимоги до продуктивності мережевої інфраструктури. Типові промислові сценарії включають дистанційний моніторинг, управління технологічними процесами, передбачуване обслуговування обладнання, а також взаємодію критично важливих систем у реальному часі. Висока щільність пристроїв підсилює конкуренцію за доступ до обмежених ресурсів бездротового середовища, що може призводити до перевантажень і зниження якості зв'язку [2]. Додатково, різні класи трафіку з різними вимогами до затримок і надійності створюють комплексні задачі щодо оптимізації комунікацій.

З огляду на обмежені можливості центральних хмарних ресурсів щодо обробки великих обсягів даних у реальному часі, туманний шар стає ключовим елементом архітектури високощільного промислового IoT. Туман об'єднує пристрої та проміжні обчислювальні вузли, розташовані ближче до джерел даних, що дозволяє виконувати первинну обробку, фільтрацію і агрегацію інформації без передачі у віддалену хмару. Такий підхід зменшує затримки, підвищує реактивність системи та знижує навантаження на канали широкомасштабного зв'язку. Крім того, туманний рівень може здійснювати локальне балансування навантаження і забезпечувати базові механізми безпеки, зокрема автентифікацію та шифрування на периферії мережі. Функції туманного шару також включають підтримку гібридних моделей обробки даних і оптимізацію використання обмежених ресурсів пристроїв. У промислових умовах це є важливим

для забезпечення безперервності технологічних процесів та дотримання вимог до надійності й відмовостійкості. Таким чином, туманний шар є не просто доповненням, а необхідним компонентом для сталого функціонування IoT мереж з високою щільністю вузлів.

**Огляд сучасних досліджень.** У наукових дослідженнях запропоновано ряд підходів до підвищення ефективності використання каналів зв'язку у туманних IoT мережах. Зокрема, локальна обробка та агрегація даних на периферії дозволяє суттєво зменшити обсяг переданої інформації та навантаження на мережу [3]. Ієрархічні моделі розгортання fog-вузлів забезпечують масштабованість комунікацій та оптимізацію потоків даних у високощільних середовищах [4]. Інтеграція технологій туманних обчислень з IoT інфраструктурою сприяє зниженню затримок і більш ефективному використанню мережевих ресурсів [5]. Поєднання периферійних, туманних і хмарних обчислень формує гнучку архітектуру обробки, що зменшує перевантаження каналів передачі даних [6]. Дослідження методів оптимізації мікропотоків у fog-платформах показують можливість зниження затримок і підвищення ефективності передачі в умовах обмеженої пропускну здатності [7]. Аналіз середовищ туманних обчислень для IoT інфраструктур підтверджує доцільність розподіленої обробки як механізму оптимізації мережевого навантаження [8].

В загальному вигляді задача синтезу ефективної мережі зв'язку туманного шару в умовах обмежених комунікаційних ресурсів не розв'язана, отже є актуальною.

Але у випадку, якщо склад пристроїв окремого кластера туманного шару вже визначений, то оптимальну структуру внутрішньокластерної мережі зв'язку можна синтезувати, використовуючи аналітичне рішення відповідної математичної моделі.

**Отже, метою даного дослідження** є розробка аналітичного рішення для оптимізації пропускної здатності при передачі даних в туманному шарі екосистеми Інтернету речей з високою щільністю вузлів на базі відповідної математичної моделі процесу обміну даними між шарами IoT.

### Результати дослідження

У математичній моделі процесу обміну даними між шарами IoT у якості функції оптимізації використовується середній час підтримки  $T_{cep}$  при обмеженні вартості оренди каналів зв'язку  $C < C_{max}$ .

Використовуючи формулу Літгла отримуємо

$$\gamma T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot T_i, \quad (1)$$

где  $\gamma$  – загальний трафік в мережі;  $\lambda_i$  – інтенсивність потоку пакетів на вході в кожний канал;  $T_i$  – середній час затримки пакета в кожній окремій лінії.

Нехай на вхід  $i$ -ої черги надходить пуасонівський потік пакетів з інтенсивністю  $\lambda_i$  пакетів в секунду і середнім часом обслуговування  $\mu_i^{-1}$  с, розподілений за експоненційним законом. Тоді середній час затримки пакета є таким [7]:

$$T_i = \bar{r}_i / \lambda_i + g_i / \mu_i, \quad (2)$$

$$\text{де} \quad g_i = \frac{1 - \rho_i^{m_i+1}}{1 - \rho_i^{m_i+2}} - \quad (3)$$

відносна пропускна здатність;

$$\bar{r}_i = \frac{\rho_i^2 [1 - \rho_i^{m_i} (m_i + 1 - m_i \cdot \rho_i)]}{(1 - \rho_i^{m_i+2}) (1 - \rho_i)} \quad (4)$$

середнє число запитів у черзі;  $m_i$  – число місць у черзі;  $\rho_i = \lambda_i / \mu_i$ .

Підставивши до виразу (2) вирази (3) і (4) та виконавши низку перетворень отримуємо:

$$T_i = \frac{1}{\mu_i} \frac{1 - \rho_i^{m_i+1} [(m_i + 2) - \rho_i (m_i + 1)]}{(1 - \rho_i^{m_i+1}) (1 - \rho_i)}. \quad (5)$$

Однак вираз (5) не зручний для використання в задачі оптимізації через громіздкість. Його легко представити у більш зручній формі:

$$T_i = \frac{1}{\mu_i} \cdot \sum_{k=0}^{m_i} (1+k) \rho_i^k \Big/ \sum_{k=0}^{m_i+1} \rho_i^k = \frac{1}{\mu_i} \frac{S'_{m_i}}{S_{m_i}}, \quad (6)$$

де штрих є похідною по  $\rho$ .  $\frac{\partial}{\partial \rho}$ , а

$$\sum_{k=0}^{m_i+1} \rho^k = \frac{1 - \rho^{m_i+2}}{1 - \rho} = S_{m_i},$$

де  $S_{m_i}$  – сума геометричної прогресії.

Тому середній час затримки по всій мережі знаходиться з виразу (1) з урахуванням (6) як

$$T_{cep} = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{\left( \sum_{k=0}^{m_i+1} \rho_i^k \right)}{\sum_{k=0}^{m_i+1} \rho_i^k} = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{S'_{m_i}}{S_{m_i}} \quad (7)$$

Легко показати, що залежність (7) при  $m_i \rightarrow \infty$

є формулою  $T_{cep} = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{1 - \rho_i}$  з необмеженою чергою, а при  $m_i = 0$  отримаємо модель мережі у вигляді СМО з відмовами [8]:

$$T_{cep} = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{1 + \rho_i}.$$

Функція (7) є опуклою функцією, але не містить екстремумів, тому мінімум середнього часу затримки не може бути знайдений шляхом обчислення часткових похідних по  $\rho_i$ .

У зв'язку з цим дана задача є задачею умовної оптимізації. Аналітичне розв'язання поставленої задачі можливе за умови відповідного вибору функції вартості як обмежувальної умови. Числові розрахунки показують, що зазвичай немає великої різниці між випадками використання функцій вартості того чи іншого виду, тобто слід обирати ту функцію вартості, яка найповніше відповідає умовам конкретної задачі. Розглянемо функцію вартості вигляду.

$$C = k \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{V_i}, \quad (8)$$

де при пакетній передачі  $F_i = L\lambda_i$ ,  $V_i = L\mu_i$ ;  $L$  – фіксована довжина пакета, тобто

$$C = k \sum_{i=1}^n \rho_i \quad (9)$$

і виражається в одиницях вартості передавання одиниці кількості інформації (тобто щільності потоку інформації, що загалом відповідає прийнятим принципам оплати за використання засобів зв'язку),  $\rho_i$  – коефіцієнт використання каналу або завантаження мережі.

Таким чином, оптимізаційна задача може бути сформульована в такому вигляді: визначити оптимальні значення щільності інформаційного потоку, що мінімізують середню затримку:

$$T_{cep} = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{S'_{m_i}}{S_{m_i}} \rightarrow \min. \quad (10)$$

при обмеженні на вартість передачі сумарної кількості інформації, що припадає на одиницю пропускної здатності ліній зв'язку

$$C = k \sum_{i=1}^n \rho_i \leq C_{max}. \quad (11)$$

Для вирішення цього завдання застосовано метод невизначених множників Лагранжа. Складемо функціонал оптимізації:

$$\Phi = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{S'_{m_i}}{S_{m_i}} + Pk \sum_{i=1}^n \rho_i, \quad (12)$$

де  $P$  – невизначений множник Лагранжа.

Розраховуючи часткові похідні  $\frac{\partial \Phi}{\partial \rho_i} = 0$ , отримаємо систему із  $n$  рівнянь такого вигляду:

$$\left( \rho_i \frac{S'_{m_i}}{S_{m_i}} \right)' + \gamma P k = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (13)$$

Кожне рівняння системи (13) залежить від змінної  $\rho_i$  та параметрів  $m_i, \gamma, P, k$ . Якщо  $m_i = m$  для всіх вузлів, то  $\rho_i = F(m, \gamma, P, k)$ , тобто тоді  $\rho_i^{onm} = \rho = const$ , тобто. оптимальні значення щільностей потоку інформації однакові всім гілкам і залежить від номера гілки зв'язку.

Після диференціювання і низки перетворень отримаємо диференціальні рівняння другого порядку для кожної гілки. Опускаючи індекс  $i$ , маємо

$$\frac{S'_m}{S_m} + \rho \frac{S''_m}{S_m} - \rho \frac{(S'_m)^2}{S_m^2} + \gamma P k = 0. \quad (14)$$

Шляхом заміни змінної

$$\frac{S'_m}{S_m} = Z; \quad S''_m = Z' \cdot S_m + Z \cdot S'_m \quad (15)$$

рівняння (14) стає неоднорідним лінійним рівнянням першого порядку

$$Z' + \frac{1}{\rho} Z = -\frac{1}{\rho} \gamma P k. \quad (16)$$

Загальне рішення рівняння (16) знаходиться методом варіації довільної постійної [11]. Відповідне однорідне рівняння

$$Z' + \frac{1}{\rho} Z = 0, \quad (17)$$

із змінними, що розділяються, має загальне рішення в такому вигляді:

$$Z = \frac{C_1(\rho)}{\rho}. \quad (18)$$

Оберемо функцію  $C_1(\rho)$  таким чином, щоб вираз (19) задовольняло рівняння (16).

Підставивши (18) в (16) після низки перетворень отримаємо

$$C'_1(\rho) = -\gamma P k. \quad (19)$$

Інтегруючи (19), маємо  $C_1(\rho) = -\gamma P k \rho + C_2$ , отже

$$Z = -\gamma P k + \frac{C_2}{\rho}. \quad (20)$$

Тоді, повертаючись до реальних змінних, маємо

$$S'_m / S_m = -\gamma P k + (C_2 / \rho). \quad (21)$$

Після інтегрування отримаємо значення змінної

$$S_m = C_3 \rho^{e_2} \cdot e^{-\gamma P k \rho}, \quad (22)$$

де  $C_3$  – постійна інтегрування другої квадратури.

Розв'язуючи задачу Коши при заданих початкових умовах можна отримати значення  $C_3$ . Тоді

$$\rho = C_2 / \left( \gamma P k + (S'_m / S_m) \right). \quad (23)$$

Визначимо значення  $C_2$  із умови  $\rho_0 = 1$ . Із (7)

$$\left( S'_m / S_m \right)_{\rho=1} = \frac{1+2+\dots+(m+1)}{m+2} = \frac{m+1}{2}, \quad (24)$$

тоді  $C_2 = \gamma P k + (m+1)/2$ ,

$$\rho = \left( \gamma P k + \frac{m+1}{2} \right) / \left( \gamma P k + \left( \frac{S'_m}{S_m} \right) \right). \quad (25)$$

Далі отримаємо значення множника Лагранжа  $P$ :

$$P = \frac{(m+1)/2 - (S'_m / S_m) \cdot (C_{зad} / kn)}{\gamma k ((C_{зad} / kn) - 1)}, \quad (26)$$

отже умова екстремумів  $T_{cep}$  виразу (7) є такою:

$$(\rho_{onm} - C_{зad} / kn) \left( (m+1)/2 - S'_m / S_m \right) = 0. \quad (27)$$

Умови (27) виконуються, якщо

$$\rho_{onm} - C_{max} / kn = 0; \quad S'_m / S_m - (m+1)/2 = 0.$$

Тоді оптимальне значення потоку в гілках

$$\rho_{onm} = C_{зad} / (kn), \quad (28)$$

що забезпечує мінімальне значення середнього часу затримки у мережі зв'язку:

$$T_{cep}^{min} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{C_{зad}}{k} \cdot \left( \frac{S'_m}{S_m} \right)_{onm}, \quad 0 < \rho_{onm} < 1,$$

а максимальне значення затримки в мережі досягається незалежно від вартості мережі при  $\rho = 1$ :

$$T_{cep}^{max} = (n/\gamma) \cdot (m+1)/2.$$

### Висновки та перспективи подальших досліджень

У статті проаналізовані характерні особливості туманного шару високощільного промислового IoT. Розроблена математична модель, що визначає характеристики каналів зв'язку між туманними пристроями. Сформульована оптимізаційна задача, що визначає оптимальні значення щільності інформаційного потоку, які мінімізують середню затримку мережі зв'язку з обмеженням за вартістю послуг. Рішення цієї задачі знайдено за допомогою використання невизначених множників Лагранжа. В результаті знайдені значення оптимальних потоків всередині туманного кластера між його пристроями. Знайдені значення оптимальних потоків всередині туманного кластера між його пристроями, що дозволяє синте-

зувати оптимальну мережу зв'язку за критерієм мінімізації затримки передачі інформаційних пакетів.

**Напрями подальших досліджень:** синтез між-кластерної мережі зв'язку високощільного промислового Інтернету речей.

### Конфлікт інтересів

Автори декларують, що не мають конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі

фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

### Використання засобів штучного інтелекту

Автори підтверджують, що не використовували технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Клівець С. І., Кулешов О. В., Кулешова Т. В. (2025), "Адаптивний метод динамічного керування ресурсами граничного шару індустріального Інтернету речей", *Системи управління, навігації та зв'язку*, № 4, С. 88–91, doi: <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2026.1.70-73>
2. Zamzam, M., Elshabrawy, T. & Ashour, M. (2019) *Resource management using machine learning in mobile edge computing: A survey*. In: Proceedings of the 2019 Ninth International Conference on Intelligent Computing and Information Systems (ICICIS). DOI: <https://doi.org/10.1109/ICICIS46948.2019.9014733>
3. Qayyum, T., Trabelsi, Z., Malik, A. W. & Hayawi, K., 2022, Mobility-aware hierarchical fog computing framework for Industrial Internet of Things, *Journal of Cloud Computing*, 11(1), 72, doi: <https://doi.org/10.1186/s13677-022-00345-y>
4. Kasumov, V. A., Amashov, Y. A. & Ismailov, J. M., 2023, Integration of technologies of Internet of Things and fog computing, *Problems of Informatization and Management*, 65, doi: <https://doi.org/10.18372/2073-4751.65.15367>
5. Gasimov, V. A., Aliyeva, Sh. Kh. & Assanova, Zh. S., 2023, Implementation of industrial internet of things technologies using edge, fog, and cloud computing, *Problems of Informatization and Management*, 75, doi: <https://doi.org/10.18372/2073-4751.75.18012>
6. Rezanov, B. M., 2022, Analysis of methods for reducing microflow latency in IoT support systems on fog platforms, *Control, Navigation and Communication Systems*, 3, 88, doi: <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2022.3.088>
7. Cvirkun, L. & Sobolevskiy, I., 2025, Analysis of fog computing environments for building IoT infrastructure, *Inf. Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 1, pp. 31–36, doi: <https://doi.org/10.32782/IT/2025-1-31>
8. Zhang, X., Wang, X., Xu, X. & Duan, L. (2023) *Resource Management in Mobile Edge Computing: A Comprehensive Survey*. ACM (survey). DOI: <https://doi.org/10.1145/3589639>

Received (Надійшла) 29.10.2025

Accepted for publication (Прийнята до друку) 11.02.2026

Publication date (Дата публікації) 27.02.2026

### ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ / ABOUT THE AUTHORS

**Клівець Сергій Іванович** – кандидат технічних наук, науковий співробітник наукового центру, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна;

**Sergii Klivets** – Candidate of Technical Sciences, Researcher at the research center, Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, Ukraine;

e-mail: [1546.hnups@gmail.com](mailto:1546.hnups@gmail.com); ORCID Author ID: <https://orcid.org/0000-0002-8109-0639>;

Scopus Author ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=58983477300>.

**Криховецький Георгій Яремович** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Науково-дослідний інститут воєнної розвідки, Київ, Україна;

**Heorhii Krykhovetskyi** – Cand. of Techn. Sc., Senior Researcher, Defence Intelligence Research Institute, Kyiv, Ukraine;

e-mail: [kgeorg@ukr.net](mailto:kgeorg@ukr.net); ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-2981-7810>;

Scopus Author ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=58697828100&origin=resultslist>.

**Кулешова Тетяна Василівна** – науковий співробітник наукового центру, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна;

**Tetiana Kulieshova** – Researcher of the Scientific Center, I. Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, Ukraine;

e-mail: [kuletati@gmail.com](mailto:kuletati@gmail.com); ORCID Author ID: <https://orcid.org/0000-0001-7404-109X>.

### Synthesis of the communication network of a fog-layer cluster in the high-density the Industrial Internet of Things

Sergii Klivets, Heorhii Krykhovetskyi, Tetiana Kulieshova

**Abstract.** In industrial environments, the fog layer is an important component of the Internet of Things ecosystem, ensuring the continuity of technological processes and compliance with reliability and fault-tolerance requirements. However, the limited resources of fog-layer devices lead to increased processing delays, queue buildup, data loss, or service degradation, especially with a high density of fog devices within a confined area. These challenges can be significantly reduced by forming an optimal communication network among fog devices combined into a single cluster. **The purpose of this study** is to develop an analytical solution for optimizing throughput in data transmission within fog IoT networks with a high density of nodes, based on an appropriate mathematical model of the data exchange process between IoT layers. **The following results** were obtained: a mathematical model was developed that determines the characteristics of communication channels between fog devices; an optimization problem was formulated to determine the optimal values of information flow density that minimize the average network delay under a service cost constraint; the solution to this problem was obtained using the method of Lagrange multipliers. As a result, the optimal flow values within the fog cluster between its devices were determined. **Conclusions.** The obtained optimal flow values within the fog cluster between its devices make it possible to synthesize an optimal communication network according to the criterion of minimizing information packet transmission delay.

**Keywords:** High-density Industrial Internet of Things, fog layer, computing resources, packet delay, queue.