

А.М. Чугай

Інститут проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України, Харків

## МОДЕЛЮВАННЯ ЩІЛЬНОГО ПАКУВАННЯ ПОДІБНИХ 3D ОБ'ЄКТІВ

На основі  $\rho$ -функції для двох опуклих багатогранників побудована математична модель задачі упакування гомотетичних багатогранників у прямому паралелепіпеді мінімального об'єму. Наведено деякі особливості побудованої математичної моделі, на підставі яких запропоновано підхід для побудови початкових припустимих точок, швидкий алгоритм пошуку локальних екстремумів і спрямований неповний перебір локальних мінімумів для отримання наближення до глобального мінімуму. Наведено числові приклади.

**Ключові слова:** гомотетичні багатогранники, пакування, метод  $\rho$ -функцій, обертання, нелінійна оптимізація.

### Стан проблеми та огляд літературних джерел

Розв'язок задач щільного пакування тривимірних геометричних об'єктів є актуальним у багатьох областях людської діяльності. Так наприклад, щільні пакування однорідних твердих часток становлять великий інтерес, оскільки можуть бути представлені у вигляді моделей фізичних систем, таких як рідина, скло та аморфні матеріали. Крім цього, системи щільноупакованих твердих тіл використовуються при проведенні досліджень в області гранульованих порошків і пористих матеріалів. Вивчення випадкових упакувань різних часток, також допомагає зрозуміти закономірності виникнення “безладу” у твердих тілах [1-3]. Для тривимірного моделювання, візуального й кількісного аналізу структурних особливостей різних твердих структур, а також для моделювання структури матеріалів, що використовуються у нанотехнологіях, можуть бути використані математичні моделі й методи теорії оптимізаційного геометричного проектування.

Огляд робіт, присвячених задачі пакування тривимірних геометричних об'єктів, дозволяє зробити висновок, що складність розв'язку розглянутої задачі обумовлена відсутністю ефективних алгоритмів її розв'язку. Більшість робіт зводиться до розміщення простих геометричних фігур (паралелепіпедів, циліндрів, сфер), у той час як більшість практичних задач вимагає розміщення об'єктів довільної форми. Тому пошук нових підходів і алгоритмів для розв'язку задачі розміщення тривимірних геометричних об'єктів залишається актуальним. Обчислювальна складність розв'язку задачі тривимірного пакування в загальній постановці змушує вводити ряд спрощень ( $\square$ ), які звужують область припустимих розв'язків, однак, дозволяють знаходити раціональні пакування із прийнятними витратами обчислювальних ресурсів.

На сьогоднішній день у класі задач розміщення тривимірних геометричних об'єктів найменш ви-

вченими є задачі, у яких допускаються афінні перетворення не тільки трансляції, але й довільного повороту об'єктів. Разом з тим ці задачі мають важливе як теоретичне, так і практичне значення. По своїй постановці задачі розміщення тривимірних геометричних об'єктів є оптимізаційними. Однак, існує проблема застосування методів локальної та глобальної оптимізації для розв'язання задач розміщення неорієнтованих (тобто таких, що припускають довільні обертання) тривимірних об'єктів. Це обумовлено відсутністю конструктивних засобів математичного моделювання відносин між цими об'єктами. У статті [4] приводиться огляд сучасних підходів до розв'язку задач розміщення. Автори відзначають, що одним з перспективних підходів для побудови адекватних математичних моделей зазначених задач є метод  $\rho$ -функцій. На сьогодні побудові  $\rho$ -функцій (квазі  $\rho$ -функцій) для тривимірних об'єктів присвячені роботи [5-9].

**Метою даної роботи** є математичне моделювання щільного розміщення неорієнтованих гомотетичних багатогранників.

### Постановка задачі

Нехай задані опуклі гомотетичні багатогранники  $P_i$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , та кубоїд (прямий прямокутний паралелепіпед)

$$C = \{X \in R^3 : w_2 \leq x_1 \leq w_1, l_2 \leq x_2 \leq l_1, \eta_2 \leq x_3 \leq \eta_1\},$$

параметри якого  $w_1, w_2, l_1, l_2, \eta_1, \eta_2$  є змінними. Тоді вектор  $Y = (w_1, w_2, l_1, l_2, \eta_1, \eta_2)$  визначає розміри  $C$ . Багатогранники  $P_i$  задані вершинами та коефіцієнтами гомотетії  $h_i^\nabla, i \in I$ . Вважаємо, що  $1 = h_1^\nabla \geq h_2^\nabla \geq \dots \geq h_n^\nabla$  та хоча б одна з нерівностей виконується строго.

Розміщення  $P_i$  у  $R^3$  визначається вектором трансляції  $v_i = (x_i, y_i, z_i)$  та вектором кутів обертання  $\theta_i = (\phi_i, \psi_i, \omega_i)$ ,  $i \in I$ . Таким чином, вектор

$u_i = (v_i, \theta_i) = (x_i, y_i, z_i, \phi_i, \psi_i, \omega_i)$  визначає розташування  $P_i$  в  $R^3$ , а вектор  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^m$ , де  $m = 6n$ , визначає розташування  $P_i, i \in I$ , в  $R^3$ .

Надалі багатогранник  $P_i$  з вектором  $v_i$  та кутами  $\theta_i$  позначимо через  $P_i(u_i)$ , а прями́й прямокутний паралелепіпед  $C$  зі змінними розмірами  $\Upsilon$  через  $C(\Upsilon)$ .

*Задача.* Необхідно визначити вектор  $u \in R^m$ , який забезпечує розміщення  $P_i(u_i), i \in I$ , без їх взаємного перетину в прямому прямокутному паралелепіпеді  $C(\Upsilon)$  так, щоб його об'єм

$$H(\Upsilon) = (w_2 - w_1)(l_2 - l_1)(h_2 - h_1)$$

досягав мінімального значення.

### Математична модель та метод розв'язання

На основі *phi*-функцій [5] математична модель задачі може бути записана у вигляді класичної задачі нелінійного програмування

$$H(\Upsilon^*) = \min_{(u, \Upsilon) \in \Lambda} H(\Upsilon), \quad (1)$$

де

$$\Lambda = \{(u, \Upsilon) \in R^{m+6} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, 0 < i < j \in I, \Phi_i(u_i, \Upsilon) \geq 0, i \in I, w_1 \geq 0, l_1 \geq 0, \eta_1 \geq 0, w_2 - w_1 \geq 0, l_2 - l_1 \geq 0, \eta_2 - \eta_1 \geq 0\}.$$

Доведено, що

$$\Lambda = \bigcup_{q=0}^{\zeta} \Lambda_q,$$

де кожна з підобластей  $\Lambda_q$  визначається системою нерівностей, ліві частини яких є нескінченно диференційовані функції.

Таким чином, для знаходження точки глобального мінімуму задачі (1)-(2) необхідно розв'язати задачу

$$H(\Upsilon^*) = \min_{q \in Q} \{H(\Upsilon^{*q}), q \in Q\},$$

де

$$H(\Upsilon^{*q}) = \min_{(u, \Upsilon) \in \Lambda_q} H(\Upsilon), q \in Q.$$

Оскільки  $\zeta \gg n!$ , то за розумний час неможливо знайти розв'язок цієї задачі. Тому для пошуку наближення до глобального мінімуму задачі (1)-(2) пропонується підхід, який складається з наступних етапів: побудова початкових точок, пошук точок локальних мінімумів та їх спрямований неповний перебір для отримання наближення до глобального мінімуму.

Для отримання початкових точок покриваємо багатогранники  $P_i$  кулями  $S_i$  мінімальних радіусів  $\rho_i^{\nabla}, i \in I$ . Припускаємо, що  $\Upsilon = \Upsilon^0$ , зафіксовано і забезпечує розміщення багатогранників в  $C$ . Радіуси  $\rho_i$  куль  $S_i, i \in I$ , є змінними і формують вектор  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) \in R^n$ . Це дає можливість сформулювати наступну задачу

$$\Pi(\rho^0) = \max \Pi(\rho) = \max_{(v, \rho) \in \Omega} \sum_{i=1}^n \rho_i, \quad (3)$$

$$\Omega = \{(v, \rho) \in R^{4n}, \Phi_{ij}^{SS}(v_i, v_j, \rho_i, \rho_j) \geq 0,$$

де  $0 < i < j \in I, \Phi_i^S(v_i, \rho_i) \geq 0, i \in I,$  (4)

$$s_i(\rho_i) = \rho_i - \rho_i^{\nabla} \geq 0, i \in I\};$$

$$\Phi_{ij}^{SS}(v_i, v_j, \rho_i, \rho_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - (\rho_i + \rho_j)^2;$$

$$\Phi_i^S(v_i, \rho) = \min\{x_i - \rho_i - w_2^0, y_i - \rho_i - l_2^0, z_i - \rho_i - \eta_2^0, w_1^0 - x_i - \rho_i, l_1^0 - y_i - \rho_i, \eta_1^0 - z_i + \rho_i\}.$$

Задаємо початкову точку  $(v^0, \rho^0)$ , де  $v_i^0 \in C(\Upsilon^0), \rho^0 = 0$  і для цієї точки обчислюємо точку глобального максимуму  $(v^*, \rho^*)$  задачі (3)-(4).

Після цього беремо багатогранники  $P_i(v_i^*)$  замість куль  $S_i(v_i^*)$ , задаємо випадково кути  $\theta_i^s = (\phi_i^s, \psi_i^s, \omega_i^s) \in [0, \pi], i \in I$ , фіксуємо їх та розв'язуємо задачу

$$H(\Upsilon^*) = \min_{(v, \Upsilon) \in \Gamma \subset R^{3n+6}} H(\Upsilon), \quad (5)$$

де  $\Gamma = \{(v, \Upsilon) \in R^{3n+6} : \Phi_{ij}(v_i, v_j) \geq 0,$  (6)

$$0 < i < j \in I, \Phi_i(v_i, \Upsilon) \geq 0, i \in I,$$

$$w_1 \geq 0, l_1 \geq 0, \eta_1 \geq 0, w_2 - w_1 \geq 0,$$

$$l_2 - l_1 \geq 0, \eta_2 - \eta_1 \geq 0\}.$$

Вочевидь, що

$$\Gamma = \bigcup_{q=0}^{\zeta} \Gamma_q,$$

де  $\Gamma_q$  визначається лінійною системою нерівностей.

Це означає, що пошук точок локальних мінімумів зводиться до розв'язання послідовності задач лінійного програмування.

Нехай точка  $(v^*, \Upsilon^*)$  є точкою локального мінімуму задачі (5)-(6). Після цього будуємо початкову точку

$$(u^s, \Upsilon^s) = (v^*, \theta^s, \Upsilon^*).$$

Для цієї початкової точки знаходимо точку  $(u^{0*}, \Upsilon^{0*})$  локального мінімуму задачі (1)-(2).

Спрямований неповний перебір локальних мінімумів задачі (1)-(2) зводиться до розв'язку наступних допоміжних задач.

Припускаємо, що коефіцієнти гомотетії  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \Delta$  є змінними. Це дає можливість сформулювати задачу

$$H(\gamma) = \min_{Y=(u, \gamma, h) \in \Delta} H(\gamma), \quad (7)$$

$$\Delta = \{Y \in R^{7n+6}, \Phi_{ij}(u_i, u_j, h_i, h_j) \geq 0, \quad (8)$$

$$0 < i < j \in I, \Phi_i(u_i, \gamma, h_i) \geq 0,$$

$$h_i \geq 0, i \in I, H(\gamma^{0*}) - H(\gamma) \geq \varepsilon, w_1 \geq 0, l_1 \geq 0,$$

$$\eta_1 \geq 0, w_2 - w_1 \geq 0, l_2 - l_1 \geq 0, \eta_2 - \eta_1 \geq 0\};$$

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^t 0.1H(\gamma^{0*}), t = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Для початкової точки  $Y^0 = (u^{0*}, \gamma^{0*}, h^\nabla)$  знаходимо точку локального мінімуму  $Y^{*1} = (u^{*1}, \gamma^{*1}, h^{*1})$ . Будуємо послідовність  $h_{i_1}^1 \geq h_{i_2}^1 \geq \dots \geq h_{i_n}^1$ . На основі цієї послідовності та послідовності  $1 = h_1^\nabla \geq h_2^\nabla \geq \dots \geq h_n^\nabla$  формуємо точку  $(\tilde{u}, \tilde{h})$ , де  $\tilde{u}_j = u_{i_j}^{*1}$ ,  $\tilde{h}_j = \min\{h_{i_j}^1, h_j^\nabla\}$ ,  $j \in I$ .

Далі для початкової точки  $(\tilde{u}, \tilde{h})$  обчислюємо точку  $(u^0, h^0)$  локального максимуму задачі

$$F(h^*) = \max_{(u, h) \in D} F(h) = \max_{i=1}^n h_i, \quad (10)$$

де

$$D = \{(u, h) \in R^{7n}, \Phi_{ij}(u_i, u_j, h_i, h_j) \geq 0, \quad (11)$$

$$i < j \in I, \Phi_i(u_i, h_i) \geq 0, h_i^\nabla - h_i \geq 0, h_i \geq 0, i \in I\}.$$

Якщо  $F(h^0) = \sum_{i=1}^n h_i^0 = \sum_{i=1}^n h_i^\nabla = b$ , то всі  $P_i$ ,  $i \in I$ , пакуються у  $C(\gamma^1)$ . У цьому випадку для початкової точки  $(u^0, \gamma^{0*})$  знову розв'язуємо задачу (1)-(2) і так далі. Якщо  $j \neq i_j, j \in I$ , хоча б для однієї пари індексів  $i$   $F(h^0) < b$ , то збільшуємо  $t$  у (9) на 1 і розв'язуємо задачу (7)-(8) і так далі, поки не отримаємо  $F(h^0) = b$  або  $j = i_j, j \in I$ . У випадку  $F(h^0) = b$  переходимо до розв'язування задачі (1)-(2). Якщо  $j = i_j, j \in I$ , попередня точка локального мінімуму задачі (1)-(2) приймається у якості наближення до точки глобального мінімуму цієї задачі.

Відзначимо, що для пошуку локальних екстремумів сформульованих оптимізаційних задач розроблено спеціальний метод декомпозиції, який дозво-

ляє значно зменшити обчислювальні витрати за рахунок значного зменшення кількості нерівностей у процесі пошуку локальних екстремумів.

Представимо невеликий приклад, який можна використовувати в якості тестового. Нехай задано найпростіший опуклий багатогранник з такими координатами чотирьох вершин: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0,-1).

Необхідно упакувати у прямий прямокутний паралелепіпед мінімального об'єму послідовність з 10 заданих багатогранників з такими коефіцієнтами гомотетії: 0.93, 0.92, 0.89, 0.87, 0.83, 0.84, 0.77, 0.75, 0.72, 0.7.

В результаті розв'язання задачі, використовуючи розроблений підхід, отримано точку локального мінімуму, у якій значення об'єму контейнеру дорівнює 2.4. Ця точка прийнята в якості наближення до глобального мінімуму задачі, координати її наведено у таблиці 1, а розміщення багатогранників представлено на рис. 1.

Таблиця 1

Параметри розміщення многогранників

i	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$\Phi_i$	$\Psi_i$	$\omega_i$
1	9,86	9,53	9,45	5,55	4,71	5,55
2	9,61	10,09	10,09	2,25	-0,75	3,1
3	10,4	10,05	9,94	3,68	2,35	-1,23
4	10,48	10,03	10,03	3,67	2,34	0,38
5	9,58	10,09	10,42	1,52	-0,9	-1,52
6	10,39	10,21	10,1	1,17	3,97	3,28
7	10,75	10,14	9,93	3,31	2,53	2,36
8	8,99	10,01	10,06	2,28	3,14	1,6
9	10,53	10,34	10,06	4,19	5,43	-1,43
10	10,74	9,66	9,84	3,52	5,53	4,84

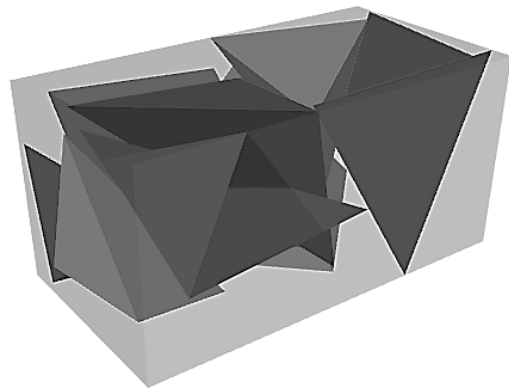


Рис. 1. Результат упакування 10 багатогранників

Для того щоб продемонструвати можливості розробленого програмного забезпечення на рис. 2 наведено результати розміщення 50 багатогранників, з кількістю 16 та 4 вершини.

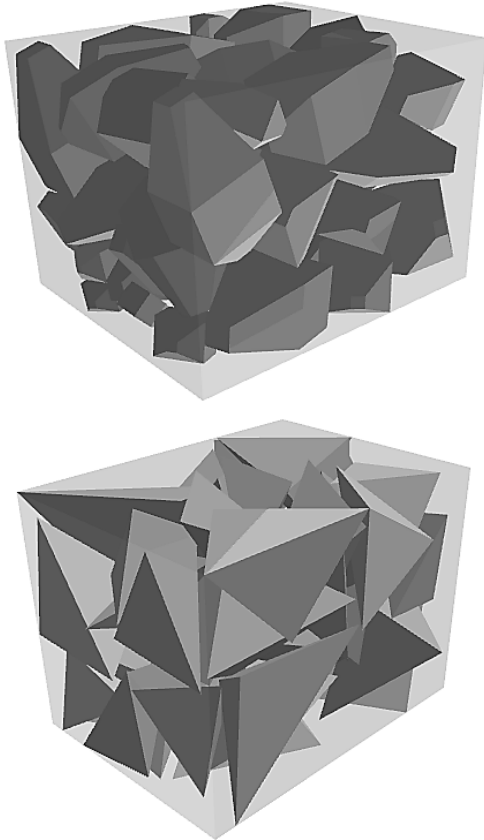


Рис. 2. Результати розміщення 50 різних багатогранників

## ВИСНОВКИ

В роботі запропоновано один з підходів для розв'язання задачі упакування опуклих гомотетичних багатогранників у прямий паралелепіпед, заснований на використанні методу  $\phi$ -функцій. Використовуючи  $\phi$ -функцію для двох опуклих багатогранників побудовано математичну модель задачі у вигляді задачі нелінійного програмування.

Для пошуку локальних екстремумів сформульованих оптимізаційних задач розроблено спеціальний метод декомпозиції, який дозволяє значно

зменшити обчислювальні витрати за рахунок значного зменшення кількості нерівностей у процесі пошуку локальних екстремумів.

## Список літератури

1. Korte A.C.J. *Random packing of digitized particles* / A.C.J Korte, H.J.H. Brouwers // *Powder Technology*. – 2013. – №233. – P. 319-324.
2. Wang Y. *3D image segmentation for analysis of multisize particles in a packed particle bed* / Wang Y., Lin C.L., Miller J.D. // *Powder Technology*. – 2016. 301, pp. 160–168.
3. Liu X. *HAF3D-a new constructive algorithm for the 3D irregular packing problem*/ Liu X., Liu J., Cao A. // *Frontiers Inf Technol Electronic Eng*. – 2015. – № 16. – pp. 380-390.
4. Bennell J. *The geometry of nesting problems: A tutorial* / J.Bennell, J. Oliveira // *European Journal of Operational Research*. – 2008. – 184. – P. 397-415.
5. Stoyan Y. *Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes*/ Stoyan Y., Chugay A. // *Cybernetics and System Analyses*. – 2012. – №48. pp. 837–845.
6. Stoyan Y. *Optimized object packings using quasi-phi-functions* // Stoyan Y.G., Romanova T., Pankratov A., Chugay A. – *Springer Optimization and Its Applications. Volume 105*, – 2015, pp. 265-293.
7. Grebennik I.V. *Packing n-dimensional parallelepipeds with the feasibility of changing their orthogonal orientation in an n-dimensional parallelepiped*/ Grebennik, I.V., Pankratov, A.V., Chugay, A.M., Baranov // *Cybernetics and Systems Analysis*. – 46(5). – 2010, pp. 793-802.
8. Стоян Ю.Г. *Построение свободной от радикалов  $\Phi$ -функции для шара и неориентированного многогранника* / Стоян Ю.Г., Чугай А.М. // *Доповіді Національної академії наук України*. 2011. № 12. с.35-40.
9. Pankratov A.V. *Optimal packing of convex polytopes using quasi-phi-functions*/ A.V. Pankratov, T.E. Romanova, A.M. Chugay // *Проблемы машиностроения*. – 2015. – Т. 18, № 2. – С. 55-65.

Надійшла до редколегії 26.12.2017

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Т.С. Романова, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, Харків.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОТНОЙ УПАКОВКИ ПОДОБНЫХ 3D ОБЪЕКТОВ

А.М. Чугай

На основании  $\phi$ -функции для двух выпуклых многогранников построена математическая модель задачи упаковки выпуклых гомотетичных многогранников в прямой параллелепипеде минимального объема. Указаны некоторые особенности математической модели, на основании которых предложены подход к построению начальных допустимых точек, быстрый алгоритм поиска локальных экстремумов и их направленный неполный перебор для получения приближения к глобальному минимуму. Приведены численные примеры.

**Ключевые слова:** гомотетичные многогранники, упаковка, метод  $\phi$ -функций, повороты, нелинейная оптимизация.

## MODELLING OF CLOSE PACKING OF HOMOTHETIC 3D OBJECTS

A.M. Chugay

On the ground of the  $\phi$ -function for two polytopes a mathematical model of the problem of packing homothetic polytopes into a cuboid of a minimum volume is constructed. A number of characteristics of the mathematical model are pointed out. Based on the characteristics a way of construction of starting points, a rapid algorithm of searching for local minima and an original approach for directed non-exhaustive search of local extrema to obtain a good approximation to a global extremum are offered. Numerical results are given.

**Keywords:** homothetic polytopes, packing,  $\phi$ -function technique rotations, non-linear optimization.