УДК 519.7

О.С. Бичков[1], В.В. Арделян[2]

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
[2] Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету, Кропивницький

МЕТОДИ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНО-ДИСКРЕТНОЇ ДИНАМІКИ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ

В роботі досліджується процес керування рухом літального апарату за допомогою узагальненої моделі неперервно-дискретної динаміки - гібридних автоматів. Лінійна система керування зводиться до гібридного автомату й проводиться його дослідження. Інструментом дослідження є гібридні s- та u- функції. Доведено теореми про стійкість, асимптотичну стійкість фазових орбіт гібридних автоматів. Теореми носять достатній характер, умови легко перевіряються.

Ключові слова: *методи керування, стійкість, гібридний автомат, керування літаком.*

Вступ

Питанням дослідження керованого руху літальних апаратів присвячено багато монографій і статей (див., Наприклад, [1-4]). Літальний апарат розглядається як частина замкнутої системи - об'єкт управління. Для спрощення математичної моделі. прийнято, що кожен режим польоту описувати своєю системою диференціальних рівнянь [5]. Прикладами такого рух є керування літаком підчас процесу скидання з літаку вантажу, ре конфігурація керування рухом в режимі «голандський крок» та інші.

Постановка проблеми в загальному вигляді. При побудові узагальнюючої моделі необхідно «зібрати» отримані моделі в єдине ціле. Зручним математичним формалізмом для цієї мети є гібридний автомат [6].

Нехай відомо, що динаміка процесу описується різними математичними моделями в N різних станах. Введемо для нумерації цих станів множину $Q = \{1,..., N\}$. Будемо називати множину, в якої гібридна автомат описується фіксованою системою диференціальних рівнянь, локальним станом.

Для опису динаміки об'єкта в кожному локальному стані будемо використовувати системи звичайних диференціальних рівнянь. Позначимо через $X = \{x_1,..., x_n\}$, $n \geq 0, x_i \in R$ дійсні фазові змінні, а через $F = \{f_i : Q \times R^n \to R^n, i = \overline{1, N}\}$ – множину неперервних вектор-функцій правих частин систем диференціальних рівнянь, які задовольняють умову Ліпшиця. Для опису динамічного процесу необхідно задати початкові умови для кожної системи рівнянь. Початкове значення фазової змінної позначимо через x.

При функціонуванні, динамічний процес переключається між станами. Ці переключення може відбуватися або при досягненні розв’язком певної множини, або в фіксовані моменти часу. Розв’язуючи системи диференціальних рівнянь на кожному локальному стані, ми отримаємо множину розв’язків, які можна склеїти. Таким чином, поведінку реального об'єкта або процесу може бути цілком задовільно описано послідовністю «склеєних» між собою розв’язків систем диференціальних рівнянь на окремих відрізках часу.

Аналіз основних публікацій. Вивченням динаміки неперервно-дискретних систем займалися В.С. Ємельянов [7], М.П. Бусленко [8], В.М. Глушков [9] та інші автори. Дослідженню стійкості гібридних автоматів присвячено роботи М. Браницького, С. Петерссона, Л. Хоу та інших авторів [10 – 14]. У них автори використають метод мультиплікативних функцій Ляпунова.

Загальним прийнятим підходом вважається необхідність побудови для підсистеми (локального стану) власної функції Ляпунова. Існуючі підходи до дослідження стійкості базуються на умови незростання значень функції Ляпунова на траєкторіях системи в точках переключень. Тобто ці підходи вимагають знаходження траєкторій. Це суттєво обмежує використання таких підходів і суперечить методології, що запропонована А.Ляпуновим.

Метою статті є надання досліднику конструктивних умов для дослідження руху літака і побудови конструктивних методів дослідження стійкості його руху.

Основна частина

Відомо [1,2], що в найпростішому випадку, керовану динаміку літального апарату в сталому режимі польоту можна описати системою лінійних диференціальних рівнянь виду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad (1)$$

де $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times 1}$, $C \in R^{1 \times n}$, $D \in R$.

Зауваження 1. Якщо $D > 0$, систему (1) можна переписати в спеціальному вигляді

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)),$$

де $f_1(x(t)) = Ax(t)$, якщо $Cx(t) \ge 0$ і

$f_2(x(t)) = (A - BD^{-1}C)x(t)$, якщо $Cx(t) < 0$.

Таким чином, зі сказаного у вступі та зауваження 1, випливає, що для побудови загального руху літального апарату необхідно досліджувати стійкість гібридного автомата, тобто коли для опису динаміки в локальних станах використовуються різні системи диференціальних рівнянь.

Динаміку гібридного автомату можна називати неперервно-дискретною динамікою. Слід зауважити, що гібридний автома є узагальнічою моделлю для різних типів неперервно-дискретної динаміки.

У даній роботі вводиться поняття $s-$ та $u-$ функцій за допомогою яких проводиться дослідження стійкості гібридних систем. За допомогою цих функцій будується спеціальна поверхня, що, обмежує орбіту гібридного автомата. При цьому достатні умови стійкості й нестійкості, що отримані конструктивні й легко перевіряються. Слід також зауважити, що знаходження траєкторій не вимагається. Поведінку об'єкту (процесу) на кожному локальному стані будемо називати неперервною динамікою, а перехід із стану в стан - дискретною динамікою.

На початку функціонування необхідно задавати початкові умови для кожної системи диференціальних рівнянь. Для ініціалізації цих значень введемо множину $Init : Init \subset Q \times R^n$. Запис $(i, y) \in Init$ означає, що динаміка починається з i-го стану та описується i-ю системою диференціальних рівнянь. При цьому початкове значення фазової змінної дорівнює y. Нехай система перебуває в i-му стані. Тоді для фазових змінних виконується умова належності до деякої множини, що описує цей стан. І поки виконується ця умова динаміка буде описуватися i-ю системою диференціальних рівнянь. Для завдання цієї умови введемо позначення $Inv : Inv \subset Q \times R^n$. Для переключення із стану в стан необхідно задати умову такого переходу.

Нехай $Jump$ - задає множинно-значну функцію таку, що $Jump : Q \times R^n \to P(Q \times R^n)$, де через P позначено множину усіх підмножин. Ця функція задає умову переходу із стана в стан та початкове значення фазової змінної в момент переходу у новий стан.

Означення 1 [14-16]. Гібридним автоматом назвемо кортеж $H = (Q, X, F, Init, Inv, Jump)$.

Нехай переключення станів i відбувається в моменти часу τ_i'. Надалі будемо використовувати скінчену або нескінченну послідовність інтервалів $\tau = \{I_i\}_{i=0}^N$, таку, що

1) $I_i = [\tau_i, \tau_i']$, $i < N$.

2) $\tau_i \le \tau_i' = \tau_{i+1}$, $i \ge 0$.

3) якщо $N < \infty$, то $I_N = [\tau_N, \tau_N']$, якщо $N = \infty$, то $I_N = [\tau_N, \tau_N')$.

Тобто, для гібридного автомату визначено послідовність інтервалів дійсної прямої, чиї кінцеві точки перекриваються.

Для знаходження розв'язку гібридного автомату необхідно знайти множину неперервно-диференційованих функцій, які є розв'язками систем диференціальних рівнянь для кожного окремого стану та задовольняють умові переходу із стану в стан. Сукупність таких розв'язків будемо називати орбітою. Позначимо через T множину усіх можливих τ. Ведемо таке означення.

Означення 2 [14-16]. Фазовою орбітою гібридного автомата H назвемо множину $\chi = \{(i, x)\}$, де $\tau \in T$, i - номер локального стану і $x : \tau \to R^n$ таке, що

1. $(i_0, x(\tau_0)) \in Init$.

2. Для всіх i, що $\tau_i < \tau_i'$, пара $(i, x(t)) \in Inv$ визначає неперервну динаміку на i-му локальному стані; пара $(i+1, x(\tau_{i+1})) \in Jump(i, x(\tau_i'))$ визначає дискретну динаміку, $x(.)$ - розв'язок системи диференціальних рівнянь $\dot{x}(t) = f_i(x(t))$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau_i']$.

Означення 3 [12]. Неперервний стан $x = 0$ назвемо тривіальною фазовою орбітою гібридного автомата H, якщо існує непуста множина $\overline{Q} \subset Q$ така, що для всіх $i \in \overline{Q}$ виконується

1. $(i', z') \in Jump(i, 0) \Rightarrow z' = 0$ й $i' \in \overline{Q}$;

2. $f(i, 0) = 0$ для всіх $i \in Q$.

Означення 4. Тривіальна фазова орбіта $x = 0$ гібридного автомата H називається стійкою за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$, існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $\chi = (i, x)$, що задовольняють умову $|x_0| < \delta$ виконується $|x(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \in \tau$.

Через $|\cdot|$ - позначено евклідову норму.

Означення 5. Локальний стан назвемо стійким за Ляпуновим, якщо тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що описує динаміку гібридного автомата в ньому стійкий за Ляпуновим.

Надалі будемо розглядати автономні гібридні автомати. Для гібридних автоматів із стійкими локальними станами існують додатно визначені функції Ляпунова $V_i(x)$, $i = \overline{1, N}$, похідні яких в силу систем, які відповідають цим станам, є функціями від'ємно напіввизначеними.

Припустимо, що орбіта гібридного автомата починається із першого стану. Нехай позначення $x^k|_{i \to j}$ означає, що гібридний автомат переходить із стану i в стан j і значення x^k береться на множині, що задає умову переходу. Побудуємо таку послідовність $\{x^k\}$, $i=\overline{0,N}$:

$$x^0|_{N\to 1},\ c_0=V_1(x^0),\ x^1=V_1^{-1}(c_0)|_{1\to 2},\\ c_1=V_2(x^1),\ x^2=V_2^{-1}(c_1)|_{2\to 3},\ldots,\\ c_{N-1}=V_N(x^{N-1}),\ x^N=V_N^{-1}(c_{N-1})|_{N\to 1}\ldots \quad (2)$$

Для дослідження стійкості тривіальної орбіти введемо означення гібридної s-функції.

Означення 6. Назвемо $V(i,x)=\{V_i(x)\}$, $i=\overline{1,N}$ гібридною s-функцією, якщо $V_i(x)$ додатно визначені та для послідовності $\{x_i\}$, $i=\overline{0,N}$ визначеної в (2) виконується $|x^N|\le|x^0|$.

Як відомо [9], поверхня рівня звичайної функції Ляпунова $V(x)=c$ замкнута. Для гібридних $s-$ функцій це не так. Послідовність (2) задає ступінчасту поверхню рівня для гібридної s-функції.

Означення 7. Похідною гібридної s-функції в силу системи назвемо вираз

$$\frac{dV}{dt}=\left\{\frac{\partial V}{\partial x}(i,x)f_i(x(t)),\ i=\overline{1,N}\right\}.$$

Введемо такі позначення:

$$B_r=\{x\in R^n : |x|\le r\},\ S_r=\{x\in R^n : |x|=r\}.$$

Теорема 1. Нехай гібридний автомат H із стійкими локальними станами має тривіальну фазову орбіту $x=0$, та для нього $|Q|<\infty$, $Jump(i,x)=\{(i+1,x)\}$, для $i=\overline{1,N-1}$, $Jump(N,x)=(1,x)$. Також нехай задано окіл початку координат $D\subset X$. Нехай переходи із стану в стан відбуваються на гіперплощинах. Якщо для H існує додатно визначена гібридна s-функція $V(i,x):\ Q\times D\to R$ така, що $\frac{\partial V}{\partial x}(i,x)f_i(x(t))\le 0$ для всіх $x\in D$ та $i=\overline{1,N}$, тоді $x=0$ стійка тривіальна фазова орбіта гібридного автомата H.

Доведення. Для простоти викладання покладемо, що $Q=\{1,2\}$ й орбіта починається із першого стану. Позначимо $\Omega_r(i)=\{x\in R^n : V(i,x)\le r\}$. Виберемо довільне $\varepsilon>0$. Покажемо, що можна, в умовах теореми, знайти $\delta>0$ таке, що всі орбіти (τ,i,x) для яких виконується $x(\tau_0)\in B_\delta$ задовольняють умові $x(t)\in B_\varepsilon$ для всіх $t\in\tau$.

Виберемо $r\in(0,\varepsilon)$ таке, що $B_r\subseteq D$. Покладемо $a(i)=\min\limits_{x\in S_r}V(i,x)$ для всіх $i\in Q$ й $b(i)\in(0,a(i))$. Тоді $\Omega_{b(i)}(i)\subseteq B_r$. Далі, нехай $p(i)>0$ таке, що $B_{p(i)}\subseteq\Omega_{b(i)}(i)$. Покладемо $s=\min\limits_{i\in Q}p(i)$ й нехай $x(\tau_0)\in B_s$. Якщо не відбудеться перехід в інший стан, то орбіта залишиться в $\Omega_{b(i)}(i)\subseteq B_r$ й, отже, в B_ε. Нехай гібридний автомат переходить в стан 2. Покладемо $c(i)=\min\limits_{x\in S_s}V(i,x)$ для всіх $i\in Q$. Виберемо $d(i)\in(0,c(i))$. Тоді $\Omega_{d(i)}(i)\subseteq B_s$. Далі, виберемо $w(i)$ таке, що $B_{w(i)}\subseteq\Omega_{d(i)}(i)$ й покладемо $\delta=\min\limits_{i\in Q}w(i)$. Нехай ми маємо орбіти (i,x) гібридного автомата H такі, що $|x(\tau_0)|<\delta$ й нехай гібридний автомат перебуває в стані 1. Тоді з умов теореми випливає, що $x(t)\in\Omega_{d(1)}(1)\subseteq B_s\subseteq B_\varepsilon$, $t\in[\tau_0,\tau_0']$.

Якщо переходів у новий стан немає, то теорему доведено. У противному випадку, маємо момент часу $\tau_1=\tau_0'$, у якому відбувається перехід й

$$x(\tau_1)=x(\tau_0')\in\Omega_{d(1)}(1)\subseteq B_s\subseteq\Omega_{b(2)}(2).$$

З умови теореми випливає, що

$$x(t)\in\Omega_{b(2)}(2)\subseteq B_r\subseteq B_\varepsilon,\ \ t\in[\tau_1,\tau_1'].$$

Якщо переходів у новий стан немає, то теорему доведено. Інакше орбіта переходить у початковий стан 1. За умовою теореми для гібридного автомата існує додатно визначена гібридна s-функція тому $|x(\tau_2)|\le|x(\tau_0)|$. Отже $x(t)\in\Omega_{d(1)}(1)\subseteq B_\varepsilon$. Продовжуючи по індукції для довільного τ одержуємо, що $|x(t)|<\varepsilon$ $(x(t)\in B_\varepsilon)$, $t\in\tau$. Теорему доведено.

Основні результати

Розглянемо, які умови необхідно враховувати, щоб тривіальна орбіта гібридного автомата була асимптотично стійкою.

Означення 8. Локальний стан назвемо асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що описує динаміку гібридного автомата в ньому асимптотично стійкий за Ляпуновим.

Нехай гібридний автомат має асимптотично стійкі локальні стани. Як ми вже бачили цього не достатньо для того, щоб тривіальна орбіта гібридного автомата була асимптотично стійкою. Одержимо достатні умови для асимптотичної стійкості.

Означення 9. Назвемо траєкторією фазової орбіти гібридного автомата рух точки в фазовому просторі для заданого локальному стані.

Тобто говорячи "траєкторія" будемо вважати, що ми розглядаємо поведінку гібридного автомату у локальному стані.

Теорема 2. Нехай гібридний автомат H із асимптотично стійкими локальними станами має тривіальну орбіту $x=0$ й для нього виконується

$|Q| < \infty$, $\mathrm{Jump}(i, x) = \{(i+1, x)\}$, для $i = \overline{1, N-1}$ та $\mathrm{Jump}(N, x) = (1, x)$, переходи із стану в стан відбуваються на гіперплощинах.

Нехай також задано окіл початку координат $D \subset X$. Якщо існує додатно визначена гібридна $s-$ функція $V(i, x): Q \times D \to R$ така, що $\frac{\partial V(i, x)}{\partial x} f_i(x(t)) < 0$ для всіх $x \in D$ й $i = \overline{1, N}$, тоді тривіальна фазова орбіта асимптотично стійка за Ляпуновим.

Доведення. Припустимо, що орбіта починається із стану 1 і гібридний автомат має два стани, тобто $|Q| = 2$.З умов теореми випливає, що тривіальна орбіта стійка за Ляпуновим. Покажемо, що вона є асимптотично стійкою.

Через те, що виконується умова $\frac{\partial V(i, x)}{\partial x} f_i(x(t)) < 0$, то траєкторії будуть перетинати поверхню рівня гібридної $s-$ функції в напрямку ззовні у середину. З нерівності $\frac{dV_i}{dt} < 0$ випливає, що функції $V_i(x(t))$ монотонно спадаючи й мають границю $c \ge 0$, де $= \min\limits_{i} \min\limits_{x \in D} V_i(x)$. Для доведення асимптотичної стійкості необхідно показати, що $c = 0$.

Припустимо, що це не так. Тоді в області $\Omega = \{x : c \le V_i(x) \le c_0,\}$, де $c_0 = V_1(x(t_0))$ для функцій виконується $\dot{V}_i(x) < 0$ й існують $v_i > 0$ такі, що $\dot{V}_i(x) < -v_i$. Обчислимо такі інтеграли

$$I = \int_{t_0}^{\tau_2} \dot{V}_1(x(s))ds + \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dot{V}_2(x(s))ds + \int_{\tau_3}^{t} \dot{V}_1(x(s))ds.$$

Нехай $-v = \max\limits_{i} v_i$. Тоді

$$I \le -v(\tau_2 - t_0) - v(\tau_3 - \tau_2) - v(t - \tau_3) = -v(t - t_0).$$

З іншого боку

$$I = V_1(x(\tau_2)) - V_1(x(t_0)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2)) +$$
$$+ V_1(x(t)) - V_1(x(t_3)) = V_1(x(t)) - V_1(x(t_0)) +$$
$$= V_1(x(\tau_2)) - V_1(x(\tau_3)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2)).$$

Так як $V_2(x(t))$ - функція спадна в локальному стані 2, то $V_2(x(\tau_3)) \le V_2(x(\tau_2))$ й відповідно $|x(\tau_3)| \le |x(\tau_2)|$.

Звідси випливає, що $V_1(x(\tau_3)) \le V_1(x(\tau_2))$. Замінивши $V_1(x(\tau_3))$ на $V_1(x(\tau_2))$, ми лише зменшимо праву частину рівності. Отже одержуємо, що

$$I \ge V_1(x(t)) - V_1(x(t_0)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2)),$$

або

$$V_1(x(t)) - V_1(x(t_0)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2))I \le -v(t - t_0).$$

Остаточно маємо

$$V_1(x(t)) \le V_1(x(t_0)) - v(t - \tau_0) + V_2(x(\tau_2)) -$$
$$-V_2(x(\tau_3)) \le V_1(x(t_0)) - v(t - \tau_0) + 2L,$$

де $L = V_2(x(t_0))$. Тоді існує T^* таке, що система перебуває в стані 1 і $V_1(T^*)$ буде приймати від'ємні значення. Це викликає протиріччя додатній визначеності функції $V_1(x)$ й тривіальна фазова орбіта гібридного автомата асимптотично стійка. Теорем доведено.

Перейдемо тепер до розгляду питання про нестійкість тривіальної фазової орбіти гібридного автомата.

Означення 10. Локальний стан назвемо нестійким за Ляпуновим, якщо тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь, яка описує динаміку гібридного автомата в ньому нестійкий за Ляпуновим.

Отримаємо умови, які забезпечують нестійкість тривіальних орбіт гібридних автоматів.

Означення 11. Назвемо

$$V(i, x) = \{V_i(x)\}, i = \overline{1, N}$$

гібридною u-функцією, якщо $V_i(x)$ додатно визначені й для послідовності $\{x^i\}$, $i = \overline{0, N}$ визначеної в (1) виконується $|x^N| \ge |x^0|$.

Будемо використовувати гібридну u-функцію для дослідження нестійкості тривіальної фазової орбіти гібридного автомата.

Теорема 3. Нехай гібридний автомат H з нестійкими локальними станами має тривіальну фазову орбіту $x = 0$ й для неї виконується

$$|Q| < \infty, \mathrm{Jump}(i, x) = \{(i+1, x)\},$$

для $i = \overline{1, N-1}$, $\mathrm{Jump}(N, x) = (1, x)$. Нехай задано окіл початку координат $D \subset X$, переходи із стану в стан відбуваються на гіперплощинах. Якщо для H існує гібридна u-функція $V(i, x): Q \times D \to R$ така, що $\frac{\partial V(i, x)}{\partial x} fi(x(t)) > 0$ для всіх $x \in D$ та $i = \overline{1, N}$, тоді тривіальна фазова орбіта нестійка за Ляпуновим.

Доведення. Нехай орбіта починається з першого стану й $|x(t_0)| < \delta$ й $|Q| = 2$. З того що локальні стани нестійкі, випливає, що траєкторії $x(t)$ будуть перетинати поверхні рівня $V_i(x) = c_i$ з середини, отже $|x(t|$ буде зростати. Покажемо, що при виконанні умов теореми орбіта гібридного автомата, що починається з околу початку координат буде необмежено зростати.

Нехай це не так й орбіта не залишає сфери S_ε, а прямує до граничної поверхні $V_i(x) = C$, де C визначається з умови $\{x : V_i(x) = C\} \subseteq S_\varepsilon$. Звідси випливає, що для кожного t виконується

$$V_i(x(t)) < C. \tag{2}$$

З того, що для гібридної $u-$ функції виконується умова теореми $\frac{\partial V(i, x)}{\partial x} f_i(x(t)) > 0$, випливає, що в області $\Omega = \{x \ : c_0 \le V_i(x) \le C\}$, де $c_0 = V_1(x(t_0))$ існують $v_i > 0$ такі, що $\dot{V}_i(x) > v_i$. Виберемо $v = \min\limits_i v_i$. Обчислимо інтеграли

$$I = \int_{t_0}^{\tau_2} \dot{V}_1(x(s))ds + \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dot{V}_2(x(s))ds + \int_{\tau_3}^{t} \dot{V}_1(x(s))ds.$$

Тоді

$$I \ge v(\tau_2 - t_0) + v(\tau_3 - \tau_2) + v(t - \tau_3) = v(t - t_0).$$

З іншого боку

$$\begin{aligned} I = {} & V_1(x(\tau_2)) - V_1(x(t_0)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2)) + \\ & + V_1(x(t)) - V_1(x(t_3)) = V_1(x(t)) - V_1(x(t_0)) + \\ & + V_1(x(\tau_2)) - V_1(x(\tau_3)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2)). \end{aligned}$$

Через те, що $V_2(x(t))$ - функція зростаюча в локальному стані 2, то $V_2(x(\tau_3)) \ge V_2(x(\tau_2))$ й відповідно $|x(\tau_3)| \ge |x(\tau_2)|$. Звідси випливає, що $V_1(x(\tau_3)) \ge V_1(x(\tau_2))$. Замінивши $V_1(x(\tau_3))$ на $V_1(x(\tau_2))$, ми лише збільшимо праву частину рівності. Отже одержуємо, що

$$I \le V_1(x(t)) - V_1(x(t_0)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2)),$$

або

$$V_1(x(t)) - V_1(x(t_0)) + V_2(x(\tau_3)) - V_2(x(\tau_2)) \ge \\ \ge I \ge v(t - \tau_0).$$

Остаточно маємо

$$V_1(x(t)) \ge V_1(x(t_0)) + v(t - t_0) + V_2(x(\tau_2)) - \\ - V_2(x(\tau_3)) \ge V_1(x(t_0)) + v(t - t_0) - 2L,$$

де $L = V_2(x(t_0))$. З цього випливає, що існує T^* таке, що система буде перебувати в стані 1 й $V_1(x(T)) > C$. Отже, одержали протиріччя з нерівністю (2). Остаточно робимо висновок, що тривіальна фазова орбіта гібридного автомата нестійка.

Зауваження. Наведені теореми легко узагальнити на випадок $|Q| > 2$.

Апробація

Розглянемо приклад. Нехай динаміка гібридного автомату описується чотирма системами лінійних диференціальних рівнянь. Приклад наближено демонструє стійкість динаміки при відновлені руху літака при скиданні вантажу.

$$\dot{x}_i(t) = A_i x(t),$$

де $$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -100 \\ 10 & -1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 100 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -20 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -100 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ці системи мають такі фазові портрети

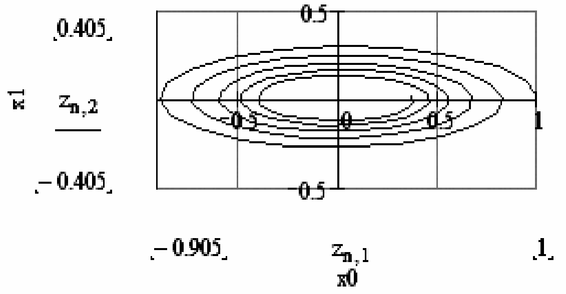

Рис. 1. Фазовий портрет системи з матрицею A_1

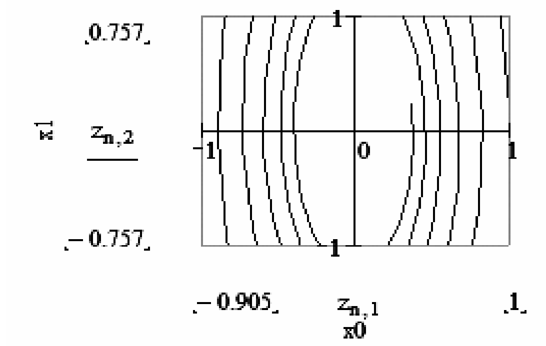

Рис. 2. Фазовий портрет системи з матрицею A_2

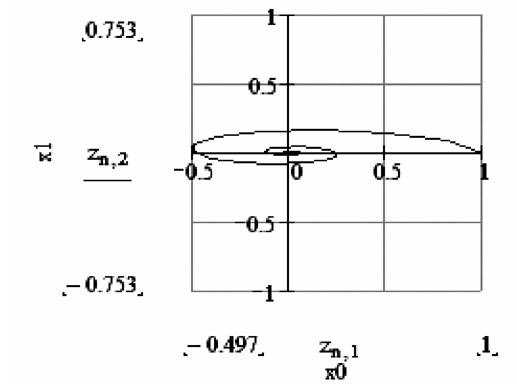

Рис. 3. Фазовий портрет системи з матрицею A_3

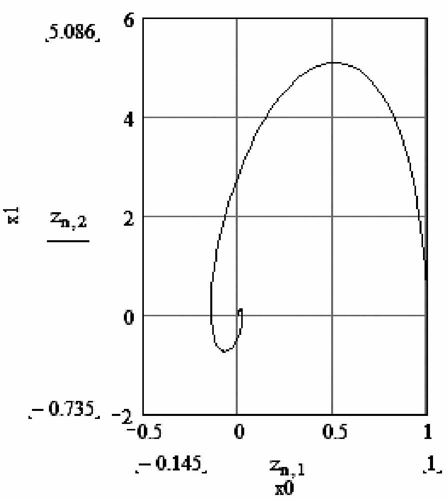

Рис. 4. Фазовий портрет системи з матрицею A_4

Побудуємо для кожної системи, окремо, квадратичну функції Ляпунова $V_i(x) = x^T H_i x$.

Маємо:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0.275 & -0.022 \\ -0.022 & 2.748 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 2.748 & 0.022 \\ 0.022 & 0.275 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0.035 & -9.2\times 10^{-3} \\ -9.2\times 10^{-3} & 0.684 \end{pmatrix},$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} 4.219 & 0.037 \\ 0.037 & 0.046 \end{pmatrix}.$$

Нехай при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ динаміка гібридного автомату описується системою 1, при $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ - системою 2, при $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ - системою 3, при $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ - системою 4. Перехід здійснюється на координатних вісях. Усі локальні стани асимптотично стійкі.

Почнемо рух з точки $x^0 = (1,0)$. Тоді $\left|x^0\right| = 1$. Для визначеної послідовності переходів маємо, що $\left|x^4\right| = 2.37\times 10^{-3}$. Тобто $\left|x^4\right| < \left|x^0\right|$. Відповідно до теореми 1 отримуємо, що тривіальна орбіта стійка за Ляпуновим.

Висновки

Досліджено процес керування рухом літального апарату за допомогою узагальненої моделі неперервно-дискретної динаміки - гібридних автоматів. Лінійна система керування зведена до гібридного автомату й проведено його дослідження. Інструментом дослідження є гібридні s- та u-функції. Доведено теореми про стійкість, асимптотичну стійкість фазових орбіт гібридних автоматів.

Список літератури

1. *Остославский* И. В., *Стражева* И. В. *Динамика полета. Устойчивость* и *управляемость летательных аппаратов. М.*: *Машиностроение*, 1969. *467 с.*

2. *Ракета как объект управления: учебник для студ. вузов / И. М. Игдалов [и др.] ; ред. С. Н. Конюхов. - Д. : АРТ-ПРЕСС, 2004. – 541*

3. *Calise, A. J., S. Lee, and M. Sharma, "Direct Adaptive Reconfigurable Control of a Tailless Fighter Aircraft," AIAA-98-4108, Aug. 1998.*

4. *Dong-Ho Shin and Youdan Kim, "Reconfigurable Flight Control System Design Using Adaptive Neural Network," IEEE Trans. on Control System Technology, vol. 12, No. 1, 2004, pp. 87-100.*

5. *Maciejowski J. M. Predictive control with constraints, Pearson Education Limited, Harlow, 2002. 331p.*

6. *Парийская Е. Гибридный подход к моделированию и качественному анализу динамических систем. Алгоритмы линейной аппроксимации нелинейного гибридного автомата. // Труды 2-ой межд. н.-т. конф. «Дифференциальные уравнения и приложения», С.-Петербург, 1998г. – с. 174-177.*

7. *Емельянов С.В. Теория систем с переменной структурой, М.:" Наука", 1970, – 590с.*

8. *Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем, М.*: Издательство *Наука*, *1978*. – 399 с.

9. *Программное обеспечение моделирования непрерывно-дискретных систем. Под ред. В.М.Глушкова, М.: Наука, 1975г.- 257с.*

10. *M. Branicky, Stability of switched and hybrid systems, in Proc. 33-rd Conf. Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, Dec. 1994, p.3498--3503.*

11. *S. Pettersson and B. Lennartson. Stability and robustness for hybrid systems. In Proc. of 35th CDC, 1996, p.1202--1207.*

12. *F. Filippov. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. Kluwer Academic Publishers, 1988.*

13. *H. Ye, A. Michel, and L. Hou. Stability theory for hybrid dynamical systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 43(4), April 1998, p.461-474.*

14. *MannaZ., PnueliA. Verifying hybrid systems. Hybrid systems, LNCS736, Springer-Verlag, 1993.*

15. *Меркин Д.Р.. Введение в теорию устойчивости движения. М., Наука, 1971.*

16. *Бичков О. Дослідження стійкості тривіальних фазових орбіт гібридних автоматів // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика. – 2005. – №6. – С. 4-8.*

Надійшла до редакції 31.10.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.В. Барабаш, Державний університет телекомунікацій, Київ.

МЕТОДЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИКИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

А.С. Бычков, В.В. Арделян

В работе исследуется процесс управления движением летательного аппарата с помощью обобщенной модели непрерывно-дискретной динамики - гибридных автоматов. Линейная система управления сводится к гибридному автомату и проводится его исследование. Инструментом исследования являются гибридные s- и u-функции. Доказаны теоремы об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости фазовых орбит гибридных автоматов. Теоремы носят достаточный характер, условия легко проверяются.

Ключевые слова: *динамика полета, методы управления, устойчивость, гибридный автомат, управление полетом.*

METHODS OF INFORMATION TECHNOLOGIES FOR INVESTIGATION OF AIRCRAFT CONTINUOUS-DISCRETE DYNAMICS

O.S. Bychkov, V.V. Ardelyan

In the article studies the process of the movement control of an aircraft using a generalized model of continuous-discrete dynamics - hybrid automata. The linear control system is reduced to a hybrid automata. The research tool is hybrid s- and u-functions. Theorems on stability, asymptotic stability, and instability of phase orbits of hybrid automata are proved. Theorems are of sufficient character, conditions are easily verified.

Keywords: *flight dynamics, control methods, stability, hybrid automaton, flight control.*