УДК 514.74+519.85

Н.И. Гиль, В.Н. Пацук

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ УСЛОВИЙ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЛИПСА И ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ПАРАБОЛОЙ

В статье рассмотрен метод построения Ф-функции эллипса и параболы, что позволяет моделировать условия непересечения и включения в различных задачах геометрического проектирования: упаковки, раскроя, компоновки и т. п. Требуемые для построения Ф-функции выражения могут быть получены с учётом условий равенства угловых коэффициентов касательных в точках касания параболы и гомотетически преобразованного эллипса. Для получения условий включения применяется преобразование системы координат. В общем случае для нахождения точек эллипса и параболы, определяющих значение Ф-функции, допустимо и даёт хороший результат применение методов второго порядка для поиска оптимума.

Ключевые слова: *Ф-функция, эллипс, парабола, непересечение, включение.*

Описание задачи

Аналитическое представление условий взаимодействия геометрических объектов (непересечение, включение) является основой построения математических моделей при решении целого ряда практических задач геометрического проектирования, в том числе задач моделирования размещения в заданных областях объектов различной физической природы. Для некоторых классов геометрических объектов реализация этих условий осуществлена на основе Ф-функций [1], которые зависят от параметров размещения объектов и принимают отрицательные, равные нулю или положительные значения в зависимости от того, объекты пересекаются, касаются или не пересекаются.

Наиболее сложными с точки зрения формализации являются условия включения и взаимного непересечения объектов, ограниченных кривыми второго порядка. Известен подход к реализации условий взаимодействия эллипсов, основанный на аппроксимации границы эллипса дугами окружностей [2]. Однако, несмотря на простоту его реализации, погрешности аппроксимации, в связи с их накоплением, могут отрицательно сказываться на конечном результате решения задач размещения, особенно при достаточно большом количестве размещаемых объектов. В [3] рассмотрен подход к реализации этих условий, основанный на использовании уравнений эллипсов, который не требует аппроксимации, хотя является более трудоёмким в реализации по сравнению с [2].

В настоящей статье рассмотрен аналогичный подход к реализации условий взаимного расположения эллипса и области, ограниченной параболой.

Постановка и решение задачи непересечения

Пусть в системе координат xOy задана парабола P с параметром p и эллипс $L\{A, B, x_0, y_0, \vartheta\}$ с параметрами размещения (x_0, y_0, ϑ) и полуосями A, B, уравнения которых

$$y - px^2 = 0$$

и

$$B^2[(x - x_0)\cos\vartheta + (y - y_0)\sin\vartheta)]^2 +$$
$$+A^2[-(x - x_0)\sin\vartheta + (y - y_0)\cos\vartheta)]^2 - A^2B^2 = 0$$

соответственно (рис. 1).

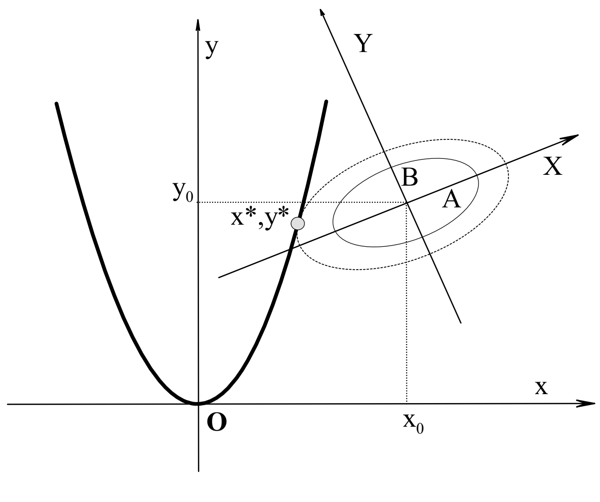

Рис. 1. Парабола и эллипс
в произвольной ориентации

Обозначим через $\overline{P}$, $\overline{L}$ области, ограниченные P и L соответственно.

Условия взаимного непересечения. Эллипс L не пересекается с областью $\overline{P}$, если существует точка (x^*, y^*), для которой выполняются условия:

– точка (x^*, y^*) принадлежит параболе P и эллипсу $L_k\{kA, kB, x_0, y_0, \vartheta\}$;

– точка (x^*, y^*) не принадлежит области $\overline{L}$;

– точки (O, p) и (x_0, y_0) находятся по разные стороны от касательной к параболе P в точке (x^*, y^*);

– угловые коэффициенты касательных к эллипсу L_k и к параболе P в точке (x^*, y^*) равны.

Представив эти условия в аналитическом виде, после необходимых преобразований имеем систему неравенств

$$\begin{cases} B^2[(x^*-x_0)\cos\vartheta + (px^{*2} - y_0)\sin\vartheta)]^2 + \\ +A^2[-(x^*-x_0)\sin\vartheta + (px^{*2} - y_0)\cos\vartheta)]^2 - \\ -A^2B^2 \geq 0, \\ -y_0 + px^*(2x_0 - x^*) \geq 0 \end{cases}$$

и равенство

$$(D + 2pSx^*)(x^* - x_0) + (S + 2pRx^*)(px^{*2} - y_0) = 0,$$

где

$$D = B^2\cos^2\vartheta + A^2\sin^2\vartheta,$$

$$R = B^2\sin^2\vartheta + A^2\cos^2\vartheta,$$

$$S = (B^2 - A^2)\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Значение x^*, удовлетворяющее равенству при заданных значениях $(A, B, p, x_0, y_0, \vartheta)$, может быть найдено одним из вычислительных методов. Тогда выполнение неравенств, при полученном значении x^*, гарантирует непересечение эллипса и области, ограниченной параболой.

При $\vartheta = 0$ (эллипс ориентирован) имеем:

$$D = B^2,\ R = A^2,\ S = 0.$$

Тогда условия непересечения принимают вид:

$$\begin{cases} B^2(x^*-x_0)^2 + A^2(px^{*2} - y_0)^2 - A^2B^2 \geq 0, \\ -y_0 + 2px_0x^* - px^{*2} \geq 0, \end{cases}$$

где x^* удовлетворяет уравнению

$$B^2(x^*-x_0) + 2pA^2x^*(px^{*2} - y_0) = 0.$$

Если $A = B = r_0$ (круг), то условия имеют вид:

$$\begin{cases} (x^*-x_0)^2 + (px^{*2} - y_0)^2 - r_0^2 \geq 0, \\ -y_0 + 2px_0x^* - px^{*2} \geq 0, \end{cases}$$

где x^* удовлетворяет уравнению

$$(x^*-x_0) + 2px^*(px^{*2} - y_0) = 0.$$

Таким образом, Φ-функцию в задаче непересечения можно представить в виде:

$$\Phi(x_0, y_0, \vartheta) =$$
$$= \min\{B^2[(x^*-x_0)\cos\vartheta + (px^{*2} - y_0)\sin\vartheta)]^2 +$$
$$+A^2[-(x^*-x_0)\sin\vartheta + (px^{*2} - y_0)\cos\vartheta)]^2 - A^2B^2,$$
$$-y_0 + 2px_0x^* - px^{*2}\},$$

где x^* удовлетворяет условию

$$2p^2Rx^{*3} + 3pSx^{*2} - [D - 2p(Sx_0 + Ry_0)]x^* -$$
$$-Dx_0 - Sy_0 = 0$$

и может быть найдено одним из численных методов.

Постановка и решение задачи включения

Условия включения эллипса L в область $\overline{P}$ (рис. 2).

В результате ряда преобразований системы координат xOy (поворот на угол ϑ, “сжатие” по оси Ox с коэффициентом A/B, поворот на угол

$$2\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2AB\sin\vartheta\cos\vartheta}{B^2\sin^2\vartheta - A^2\cos^2\vartheta})$$

парабола P в новой системе координат XOY превращается в параболу P'

$$Y^2 - 2p'X = 0,$$

а эллипс L превращается в круг $C\{B, X_0, Y_0\}$ радиуса B с центром в точке (X_0, Y_0), где p', X_0, Y_0 выражаются через p, A, B, ϑ (рис. 3).

Тогда круг C является включением в область $\overline{P'}$, ограниченную параболой P', а значит эллипс L является включением в область $\overline{P}$, если существует точка (X^*, Y^*), для которой выполняются условия:

– точка (X^*, Y^*) принадлежит параболе P' и окружности

$$C_k\{kB, X_0, Y_0\};$$

– точка (X^*, X^*) находится по ту же сторону от оси OX, что и центр (X_0, Y_0);

– точка (X_0, Y_0) принадлежит области $\overline{P'}$;

– $X^* > \overline{X}$, где $\overline{X}$ — абсцисса точки соприкосновения круга и параболы при $Y_0 = 0$ (рис. 3). Значение $\overline{X}$ однозначно определяется через B и p', если кривизна k параболы в точке $(0,0)$ больше кривизны окружности, в противном случае $\overline{X} = 0$;

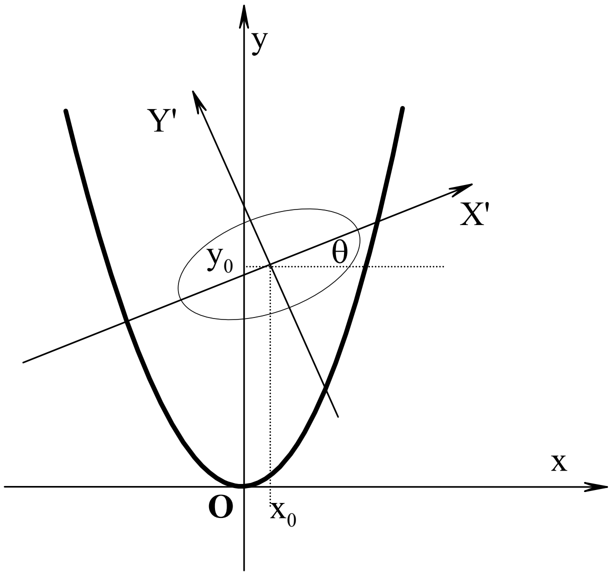

Рис. 2. Включение эллипса в область, ограниченную параболой.

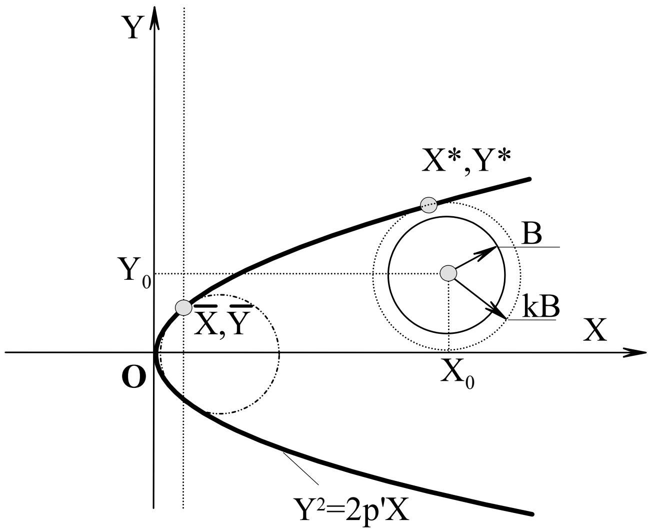

Рис. 3. Включение круга в область,
ограниченную параболой, после преобразования.

– точка (X^*, Y^*) не принадлежит кругу C;

– угловые коэффициенты касательных к параболе P' и к окружности C_k в точке (X^*, Y^*) равны.

Представив эти условия в аналитическом виде, после необходимых преобразований имеем систему неравенств

$$\begin{cases} Y^* \cdot Y_0 \geq 0, \\ X_0 - \dfrac{1}{2p'} Y_0^2 \geq 0, \\ \dfrac{1}{2p'} Y^{*2} - \overline{X} \geq 0, \\ \left(\dfrac{1}{2p'} Y^{*2} - X_0\right)^2 + \left(Y^* - Y_0\right)^2 - B^2 > 0 \end{cases}$$

и равенство

$$p'\left(Y^* - Y_0\right) + Y^*\left(\frac{1}{2p'} Y^{*2} - X_0\right) = 0 .$$

Здесь

$$p' = \frac{AB^2}{2p(A^2 \cos^2 \vartheta + B^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}} ,$$

$$X_0 = \frac{B}{A}(x_0 \cos\vartheta + y_0 \sin\vartheta)\cos 2\varphi -$$

$$-(x_0 \sin\vartheta - y_0 \cos\vartheta)\sin 2\varphi,$$

$$Y_0 = -\frac{B}{A}(x_0 \cos\vartheta + y_0 \sin\vartheta)\sin 2\varphi -$$

$$-(x_0 \sin\vartheta - y_0 \cos\vartheta)\cos 2\varphi,$$

$$\sin 2\varphi = -\frac{2AB\sin\vartheta\cos\vartheta}{A^2\cos^2\vartheta + B^2\sin^2\vartheta},$$

$$\cos 2\varphi = -\frac{A^2\cos^2\vartheta - B^2\sin^2\vartheta}{A^2\cos^2\vartheta + B^2\sin^2\vartheta},$$

$$\overline{X} = \frac{4p^2(A^2\cos^2\vartheta + B^2\sin^2\vartheta)^3 - A^2B^2}{4pA(A^2\cos^2\vartheta + B^2\sin^2\vartheta)^{3/2}},$$

$$\kappa = \frac{2p(A^2\cos^2\vartheta + B^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}{AB^2}.$$

Значение Y^*, удовлетворяющее равенству при заданных значениях $A, B, p, x_0, y_0, \vartheta$, может быть вычислено одним из вычислительных методов. Тогда выполнение неравенств, при полученном значении Y^*, гарантирует включение эллипса в область, ограниченную параболой.

Включение эллипса L в область $\overline{P}$, ограниченную параболой P, можно рассматривать как непересечение эллипса L и области $R^2 \setminus \overline{P}$, являющейся дополнением к области $\overline{P}$.

Исходя из вышеизложенного, соответствующую Φ-функцию можно представить в виде:

$$\Phi(x_0, y_0, \vartheta) =$$
$$= \min\{Y^* \cdot Y_0, X_0 - \frac{1}{2p'}Y_0^2, \frac{1}{2p'}Y^{*2} - \overline{X},$$
$$\left(\frac{1}{2p'}Y^{*2} - X_0\right)^2 + (Y^* - Y_0)^2 - B^2\},$$

где Y^* удовлетворяет условию

$$Y^{*3} + 2p'(p' - X_0)Y^* - 2p'^2 Y_0 = 0$$

и может быть найдено одним из численных методов.

Выводы

Получены условия, позволяющие построить Ф-функции эллипса и обеих бесконечных областей, границей которых является парабола.

В обоих случаях полученные выражения позволяют получить требуемые значения комбинацией аналитических выражений и применением одного из простейших вычислительных методов решения одномерной гладкой задачи оптимизации.

Список литературы

1. *Stoyan Yu.G. Ф-function and its basic properties // Докл. АН Украины. Сер. А . – 2001. – № 8. – С. 112–117.*

2. *Stoyan Yu. Cutting and Packing problems for irregular objects with continuous rotations: mathematical modeling and nonlinear optimization / Yu. Stoyan, A. Pankratov, T Romanova // Journal of Operational Research Society, Volume 67, Issue 5, P. 786–800.*

3. *Гиль Н.И. Аналитическое представление условий включения и взимного непересечения элипсов / Гиль Н.И., Пацук В.Н. // Материалы 5-й международной конференции "Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии", 22-25 марта 2016 г., Кишинэу, Молдова. – 2016. – Том 2. – С. 59–65.*

Надійшла до редколегії 30.10.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Більчук, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків.

АНАЛИТИЧНИЙ ОПИС УМОВ ВЗАЄМНОГО РОЗТАШУВАННЯ ЕЛИПСА ТА ОБЛАСТІ, ОБМЕЖЕНОЇ ПАРАБОЛОЮ

М.І. Гіль , В.М. Пацук

В статті розглянуто метод побудови Ф-функції еліпса та параболи. Ф-функція дозволяє моделювати умови неперетину та включення в різних задачах геометричного проектування: упаковки, розкрою, компоновки і т. п. Необхідні для побудови Ф-функції вирази можна отримати з урахуванням умов рівності кутових коефіцієнтів дотичних прямих у точках дотику параболи і гомотетично перетвореного еліпса. Для отримання умов включення застосовується перетворення системи координат. У загальному випадку для знаходження точок еліпса і параболи, що вызначають значення Ф- функції, допустимо і дає добрий результат застосування методів другого порядку для пошуку оптимума.

Ключові слова: *Ф-функція, еліпс, парабола, неперетин, включення.*

AN ANALYTICAL DESCRIPTION OF MUTUAL PLACEMENT CONDITIONS FOR AN ELLIPSE AND A REGION RESTRICTED BY A PARABOLA

M.I. Gil , V.M. Patsuk

A method of construction of a Ф-function of an ellipse and a parabola is considered. Ф-function allows to model non-intersection and inclusion conditions in different geometric design problems: packing, cutting, arrangement, etc. Necessary expressions for Ф-function construction can be obtained using the conditions of tangent coefficient equality in tangent points of the parabola and the homothetically transformed ellipse. To obtain inclusion condition a coordinate system transformation is applied. In the general case an application of second-order methods for optimum search is acceptable and gives a good result for finding the points of the ellipse and the parabola which determine Ф- function value.

Keywords: *Ф- function, ellipse, parabola, non-intersection, inclusion.*