УДК 681.3.06: 519.7

Д.Э. Лысенко

Одесский национальный политехнический университет, Украина

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА С УЧЕТОМ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В статье рассматриваются математические модели планирования многономенклатурного производства. Выделяются случайные факторы, которые следует учитывать при формализации задач планирования объемов производства и загрузки оборудования. Производится синтез моделей планирования объемов производства в детерминированном и в стохастическом вариантах. Предлагается модель закрепления изделий за рабочими местами для реализации планируемых объемов выпуска.

Ключевые слова: *математическое моделирование, многономенклатурное производство, линейное программирование, неопределенные факторы.*

Введение

Одной из актуальных проблем планирования производства является совместное решение задач планирования объемов производства и загрузки оборудования. Для оценки реализуемости объемных характеристик планов многономенклатурного производства следует использовать модели задач оптимизации. Они позволяют определить оптимальные объемы производства с учетом ресурсных ограничений и целевых функций, определяющих максимизацию прибыли. Если полученные значения объемов производства и ожидаемой прибыли от реализации новой продукции не меньше планируемых, то план производства продукции является реализуемым.

Постановка задачи

Обычно в подсистеме планирования производственного предприятия используются модели в детерминированной постановке [1, 2]. Однако, при значительной неопределенности информации, как о внешней среде, так и условиях производства, более адекватными будут модели с параметрами, представленными в виде прогнозных интервальных значений.

Задача планирования и оценивания многономенклатурного производства на прединвестиционном этапе состоит из двух последовательных этапов:

- оценка объемов производства продукции с учетом наличия сырьевых, энергетических, складских и других ресурсов, прогнозируемой прибыли от реализации продукции и затрат на производство и хранение [3];

- оценка требуемого состава оборудования предприятия с учетом оптимального плана производства, состава и технических характеристик оборудования [4].

Общие подходы к решению указанных задач определяются моделями и методами теории принятия решений [5, 6]. Однако, учет специфики каждой из них требует применения соответствующих моделей.

При определении реализуемого плана производства учитывается ряд факторов: обеспеченность сырьевыми и производственными ресурсами; уровень материально-технического обеспечения; уровень информационного обеспечения о состоянии элементов системы производства и состоянии среды, в которой это производство функционирует; уровень методического и математического обеспечения решения задачи оптимизации плана производства, содержащего информационные технологии расчета прибыли и потерь, учета неопределенности исходных данных.

Получаемый в результате решения соответствующей оптимизационной задачи план производства содержит перечень выпускаемых номенклатур и объемы их производства. Эти данные используются для решения задачи планирования занятости оборудования. Структура подсистемы планирования производства приведена на рис. 1.

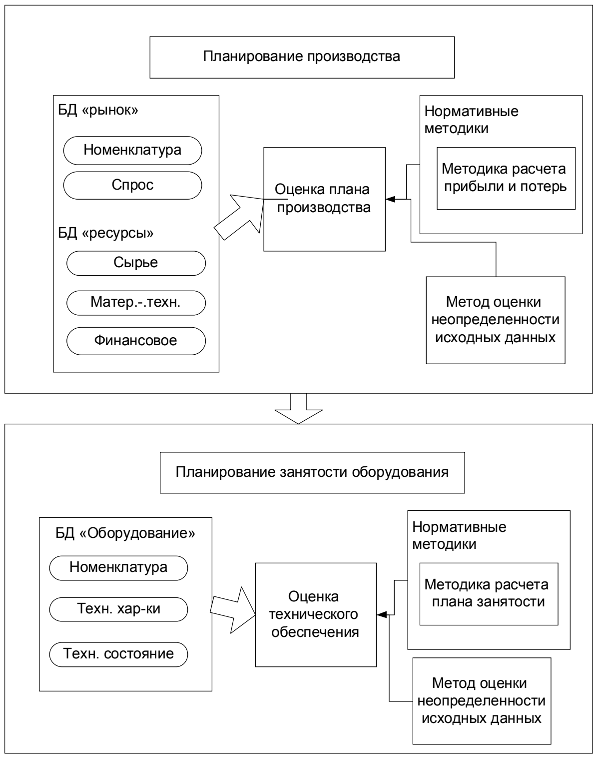

Рис. 1. Структура подсистемы планирования производства и занятости оборудования

Основной задачей планирования производства является определение оптимальных параметров организации производственного процесса, обеспечивающих его наиболее эффективную реализацию [7].

Планирование производства включает две взаимосвязанные задачи: планирование производственной программы и планирование выполнения производственной программы. Вторую из этих задач обычно называют задачей планирования занятости оборудования. Основное содержание первой задачи состоит в установлении номенклатуры и объемов производства, согласованных с возможностями сбыта продукции, определяемых спросом.

Оптимизационная задача планирования объема производства

Рассмотрим математическую модель задачи планирования объема производства. Однопродуктовая задача указанного типа формулируется следующим образом [2]. Обозначим: x_t – количество продукции, которое планируется произвести в t-м периоде, $t = 1 \ldots T$; y_t – количество продукции, которое необходимо произвести для удовлетворения требований рынка в t-м периоде; p_t – цена единицы продукции в t-м периоде при реализации, $c_t(x_t)$ – прогнозируемая стоимость производства единицы продукции в зависимости от объема производства; a – планируемый уровень незавершенного производства; b – прогнозируемая емкость рынка. Требуется определить набор x_t, $t = 1 \ldots T$, максимизирующий

$$F(X) = \sum_{t=1}^{T} p_t y_t - \sum_{t=1}^{T} c_t(x_t) x_t$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$a + \sum_{t=1}^{T-1} x_t \ge \sum_{t=1}^{T} y_t, \; a + \sum_{t=1}^{T} x_t \le b, \; x_t \ge 0, \; t = \overline{1,T}.$$

Если $c_t(x_t)$ имеет вид

$$c_t(x_t) = c_{0t} + c_{1t} x_t + c_{2t} x_t^2,$$

то эта задача становится квадратической и решается методами нелинейного программирования [8]. Недостатки приведенной модели следующие: однопродуктовость и детерминированность объема производства.

Первый из этих недостатков устраняется в модели, в которой учитываются материальные затраты на изготовление продукции. При этом используются следующие обозначения: d_{ij} – норма расхода материала j-го вида на изготовление единицы продукции i-го вида; $i = 1 \ldots m$; $j = 1 \ldots n$, N_{it} – объем спроса на продукцию i-го вида в t-й период, $t = \overline{1,T}$; $\underline{y_j}, \overline{y_j}$ - допустимые минимальный и максимальный запасы материалов j-го вида; c_j – стоимость единицы материала j-го вида; x_{it} – планируемый объем производства продукции i-го вида в t-й период.

Оптимизационная модель данной задачи: найти набор $X = (x_{it})$, минимизирующий

$$L(X) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} d_{ij} c_j x_{it}$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$x_{it} \ge N_{it}, \; i = \overline{1,m}, \; t = \overline{1,T},$$

$$\underline{y_j} \le \sum_{i=1}^{m} d_{ij} x_{it} \le \overline{y_j}, \; j = \overline{1,n}, \; t = \overline{1,T}.$$

Указанная модель является статической, поскольку изменения размеров запасов во времени в ней не учитываются. Кроме того, в ней предполагается детерминированность спроса, объем которого для каждого периода времени считается известным. Этот недостаток отсутствует в модели, в которой можно определить множество возможных состояний спроса. При этом вводятся матрица с элементами k_{ij} – количество единиц изделий i-го вида, которые могут быть реализованы при j-м варианте спроса, и матрица с элементами c_{ij} – соответствующая цена реализации этих изделий, $i = 1 \ldots m$; $j = 1 \ldots n$. Если z_i – издержки производства изделия i-го вида, которые не зависят от спроса, то прибыль a_{ij} в результате реализации единицы изделия i-го вида при j-м варианте спроса, определяется формулой

$$a_{ij} = c_{ij} - z_i, \; i = 1 \ldots m; \; j = 1 \ldots n,$$

При этом прибыль от реализации k_{ij} изделий i - го вида при j-м варианте спроса будет равна

$$p_{ij} = a_{ij} k_{ij} = (c_{ij} - z_i) k_{ij}.$$

Таким образом, формируется матрица $P = (p_{ij})$, которая рассматривается как платежная матрица антагонистической игры. Строкам матрицы соответствуют чистые стратегии производства, а столбцам – чистые стратегии рыночного спроса.

Оптимальное распределение объемов выпуска продукции соответствует оптимальной смешанной стратегии предприятия. Искомая стратегия определяется путем сведения матричной игры к задаче линейного программирования. Недостаток этой модели состоит в том, что она приводит к оптимальной чистой стратегии, не соответствующей многономенклатурному производству.

Необходимость устранения указанных недостатков обуславливает применение моделей планирования с учетом неопределенности [7].

Оценка плана производства с учетом неопределенных факторов

Рассмотрим задачу планирования производства с использованием стохастического и нечеткого представления неопределенных факторов. Обозначим: r_j – количество ресурса i-го типа, расходуемого на изготовление единицы j-го продукта, $i = 1 \ldots m$; $j = 1 \ldots n$, x_j – планируемое для производства количество единиц j-го продукта, $j = 1 \ldots n$, Q_i – имеющийся в наличии запас ресурса i-го типа, $\varphi(\theta_j)$ – плотность распределения случайной величины моделируемого объема производства продукции j-го вида, $\mu_j(\theta_j)$ – функция принадлежности нечеткой величины возможного объема производства продукции j-го вида, G_j – средняя прибыль от реализации единицы продукции j-го вида, $G_j = \beta_j - c_j$, β_j - средний доход от реализации единицы продукции j-го вида, c_j – средние затраты на изготовление единицы продукции j-го вида, α_j – средние затраты на хранение единицы продукции j-го вида на складе предприятия.

Рассмотрим ситуацию, когда ни плотности распределения случайных величин возможного объема производства, ни их функции принадлежности не известны, однако задан набор функций $f_j(x_j)$, определяющих средний уровень поставки продукции соответствующего вида при производстве этой продукции в количестве x_j, j = 1…n. Тогда средняя прибыль от производства продукции *j*-го вида в количестве x_j.

$$g_j(x_j) = G_j f_j(x_j).$$

При этом суммарная средняя прибыль от плана производства $X = (x_1, x_2 ... x_n)$ будет равна

$$G(X) = \sum_{j=1}^{n} G_j f(x_j)$$

В соответствии с законом убывающей эффективности производства для всех $f_j(x_j)$ имеет место

$$f'(x) > 0, f''(x) < 0.$$

Этими свойствами обладает функция

$$f(x_j) = x_j^{\alpha_j}, \alpha_j \in [0,1].$$

При этом $$G(X) = \sum_{j=1}^{n} G_j x_j^{\alpha_j}. \qquad (1)$$

План производства $X = (x_1, x_2 ... x_n)$ должен быть согласован с ограничениями, связанными с расходом ресурсов при производстве продукции

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j \le Q_i, i = \overline{1,m}, x_j \ge 0, j = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Ограничения (2) записаны в виде неравенств, что предполагает возможность неполного израсходования ресурса. Если это не так, то стандартным образом осуществляется переход от неравенств к равенствам. Тогда задача формирования рационального плана сведется к отысканию неотрицательного вектора X, максимизирующего (1) и удовлетворяющего ограничениям (2) в форме равенств. Эта задача может быть решена методом неопределенных множителей Лагранжа. Сформируем функцию Лагранжа

$$\Phi(X,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} G_j x_j^{\alpha_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j - Q_i \right),$$

далее $$\frac{d\Phi(X,\lambda)}{dx} = G_j \alpha_j x_j^{\alpha_j - 1} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i r_{ij} = 0, j = \overline{1,n},$$

т.е. $$x_j = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i r_{ij} \Big/ \left(G_j \alpha_j \right) \right)^{1/(\alpha_j - 1)}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим систему уравнений относительно λ_i:

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i r_{ij} \Big/ \left(G_j \alpha_j \right) \right)^{1/(\alpha_j - 1)} = Q, \quad i = \overline{1,m}.$$

Нелинейная относительно набора λ_i система уравнений решается численно. Решение $(\lambda_1^*, ... \lambda_m^*)$ подставляется в (3) для расчета компонентов плана.

Оптимизационная задача закрепления оборудования

После решения задачи моделирования планируемых к производству объемов продукции и оценки соответствующих параметров производства (прибыльности, ресурсоемкости и др.) необходимо определить возможность реализации планируемых объемов продукции с учетом реальной технической оснащенности производства.

Важным элементом планирования производства является задача определения и обеспечения производственного процесса на уровне наибольшей его производительности в конкретных условиях. Основой планирования является информация о распределении оборудования в течение будущего периода для производства изделий по каждой из номенклатур. Сформулируем модель задачи с учетом многофункциональности оборудования, затрат на производство и требований к плану производства.

Рассмотрим задачу закрепления оборудования, которая формулируется следующим образом [5]: найти закрепление типов изготовляемых изделий за каждым рабочим местом или их группой, обеспечивающее минимальные затраты ресурсов на выполнение плана выпуска изделий. Такая задача возникает, если для обработки одних и тех же деталей может быть использовано различное оборудование (после соответствующей переналадки). При этом появляется возможность маневрирования ресурсами мощностей путем передачи обработки с перегруженных на недогруженные группы оборудования.

Сформулируем математическую модель этой задачи в терминах линейного программирования. Вводятся следующие обозначения: d_{ij} – средний расход ресурса при изготовлении одного изделия j-го типа оборудованием i-го типа, i = 1…m; j = 1…n; x_j – планируемое для изготовления количество изделий j-го типа; a_i – располагаемый ресурс оборудования i-го типа. Задача планирования формулируется следующим образом: найти набор x={x_j}, максимизирующий суммарное количество изготовленных изделий

$$R(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \le a_i, \ i = \overline{1,m}; \ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}.$$

В этой модели предполагается, что в изготовлении изделий каждого вида участвует оборудование всех типов, расходуя при этом свой ресурс. При этом не учитывается, что в соответствии с технологическим процессом изготовления изделий на практике необходимо реализовать некоторую последовательность операций, каждая из которых не обязательно выполнима на любом из типов оборудования. Кроме того, в модели не учитывается, что при изготовлении многих видов продукции используется многофункциональное оборудование, на котором может быть выполнено (после переналадки) несколько необходимых операций.

Определим переменные: a_{ijk} – затраты времени на производство единицы продукции j-го вида на станках i-й группы по k-му варианту технологического процесса; m – число групп оборудования; n – число наименований продукции; S – число вариантов технологического процесса; x_{jk} – количество единиц продукции j-го вида, планируемое для выпуска k-м вариантом технологического процесса; Φ_i – располагаемый фонд временного ресурса i-й группы оборудования; N_j – планируемое для изготовления число единиц продукции j-го вида, в соответствии с прогнозом спроса. Тогда суммарные затраты времени на изготовление планируемой продукции по всем группам оборудования определяются выражением

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}a_{ijk}x_{jk}\ .$$

Задача состоит в отыскании плана загрузки оборудовании $X=(x_{jk})$, минимизирующего L(X) и удовлетворяющего ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}a_{ijk}x_{jk}\le\Phi_i\,,\ \sum_{k=1}^{K}x_{jk}\ge N_j\,,$$

$$x_{jk}\ge 0\,,\ i=\overline{1,m}\,;\,j=\overline{1,n}\,,\ k=\overline{1,K}\,.$$

Полученная задача определяет минимизацию времени производства с учетом вариантов технологических процессов, решается общими методами линейного программирования [2].

Выводы

Рассмотрены математические модели планирования однономенклатурного и многономенклатурного производства. Показано, что задача оценки планов производства в условиях случайного спроса на продукцию, с учетом уровня обеспеченности ресурсами, прибыли от реализации продукции, потерь от дефицита сводится к задаче математического программирования на основе оптимизационных моделей. Сформирована модель максимизации ожидаемой прибыли при ресурсных ограничениях с учетом стохастических параметров. При этом объем производства задан в виде плотности распределения случайной величины. Определен способ решения задачи с помощью функции Лагранжа.

Результаты работы могут быть использованы при принятии решений о возможности выполнения планов по выпуску инновационной продукции с учетом характеристик производства, в том числе, имеющегося оборудования.

Список литературы

1. *Косачев А.В. Модель оптимального управления долгосрочным развитием интеллектуального предприятия / А.В. Косачев, В.Е. Лялин, В.В. Семенов // Аудит и финансовый анализ. – 2006, № 4. – С. 314 – 349.*
2. *Карманов В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 264 с.*
3. *Кочурова Л. Планирование в условиях развития рынка / Л. Кочурова // Проблемы теории и практики управления. 2010. – № 1. – С. 35-40.*
4. *Серая О.В. Распределительная задача линейного программирования / О.В. Серая // Математичнские методы и модели, 2013. – Вып. 2 (109). – С. 167 – 170.*
5. *Разработка и принятие решений в управлении инновациями / И.Л. Туккель, С.Н. Яшин, С.А. Макаров, Е.В. Кошелев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 352 с.*
6. *Эддоус М. Методы принятия решений / М. Эддоус, Р. Стэнсфилд.. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 590 с*
7. *Ханк, Д.Э. Бизнес-прогнозирование: пер. с англ. [Текст] / Д.Э. Ханк, Д.У. Уичерн, А. Дж. Райтс. – 7-е изд.– М.: Вильямс, 2003. – 656 с.*
8. *Габасов Р. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. В. Альсевич, А. И. Калинин, В. В. Крахотко, Н. С. Павленок. - Минск : Издательство «Четыре четверти», 2011. — 472 с.*

Надійшла до редколегії 27.01.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.Є. Федорович, Національний аерокосмічний університет імені М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків.

ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ ПЛАНУВАННЯ ВИРОБНИЦТВА З УРАХУВАННЯМ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Д.Е. Лисенко

У статті розглядаються математичні моделі планування многономенклатурного виробництва. Виділяються випадкові чинники, які слід враховувати при формалізації задач планування обсягів виробництва і завантаження обладнання. Проводиться синтез моделей планування обсягів виробництва в детермінованому і в стохастичному варіантах. Пропонується модель закріплення виробів за робочими місцями для реалізації запланованих обсягів випуску.

Ключові слова: *математичне моделювання, багато-номенклатурних виробництва, лінійне програмування, невизначені фактори.*

OPTIMIZATION MODELS OF PRODUCTION PLANNING ACCORDING TO UNCERTAINTY

D.E. Lysenko

In the article mathematical models of planning of multinomenclature production are considered. There are random factors that should be taken into account when formalizing the tasks of planning production volumes and loading equipment. Synthesis of models of production volume planning in deterministic and stochastic variants is carried out. The model of fastening of products behind workplaces for realization of planned volumes of release is offered.

Keywords: *mathematical modeling, multinomenclature production, linear programming, uncertain factors.*