УДК 510.635

А.И. Коваленко, М.С. Широкопетлева

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ЧИСЛОВЫЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ АЛГЕБРЫ ПОНЯТИЙ

В работе изучаются свойства алгебры понятий. С этой целью рассмотрены числовые интерпретации алгебры понятий - алгебры чисел разного порядка. Проанализированы алгебры чисел нулевой, первой и n-й размерности.

Ключевые слова: *алгебра конечных предикатов, алгебра понятий, каноническая алгебра, изоморфизм, интерпретации алгебры, алгебраическая система, многозначная логика.*

Введение

Работа является логическим продолжением статей [1, 2]. В [1] доказана теорема о существовании и единственности стандартной формы алгебры понятий. В [2] доказана теорема об изоморфизме алгебр понятий одинаковой размерности. Обе эти теоремы вместе позволяют утверждать, что алгебра понятий каждой размерности существует и единственна с точностью до изоморфизма. Рассмотрены некоторые возможные интерпретации алгебры понятий - алгебры множеств, двоичных наборов, одноместных и многоместных предикатов первого порядка, булевых функций. В настоящей статье рассмотрены числовые интерпретации алгебры понятий - алгебры чисел разного порядка.

1. n-мерная алгебра чисел

Рассмотрим числовую интерпретацию алгебры понятий, которую получаем, заменяя элементы канонической алгебры понятий их номерами. В табл. 1 представлены в виде примера операции дизъюнкции понятий (в данной интерпретации – натуральных чисел) при $n = 1,2,3$.

Таблица 1

Пример операции дизъюнкции понятий

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	3	3	5	5	7	7
2	2	3	2	3	6	7	6	7
3	3	3	3	3	7	7	7	7
4	4	5	6	7	4	5	6	7
5	5	5	7	7	5	5	7	7
6	6	7	6	6	6	7	6	7
7	7	7	7	7	7	7	7	7

Можно считать, что табл. 1 задает некоторые функции 2-, 4-, и 8-значной логики [3]. При $n = 1$ приходим к такой алгебре чисел, для которой дизъюнкция понятий - это дизъюнкция двузначной логики. Однако при любом $n > 1$ дизъюнкция понятий в алгебре чисел не совпадает с дизъюнкцией 2^n-значной логики $x \vee y = \max(x, y)$, поскольку в алгебре чисел любой размерности $n > 1$ $1 \vee 2 = 3$, а в 2^n-значной логике $1 \vee 2 = 2$. Отличие семейства всех алгебр чисел от семейства всех многозначных логик с операцией дизъюнкции состоит в том, что алгебры чисел могут быть заданы лишь на множествах, состоящих из 2^n элементов. Многозначные же логики могут быть заданы на множестве с любым числом элементов k.

Опишем на языке алгебры конечных предикатов (АКП) в форме неявного задания [4] дизъюнкцию понятий для n-мерной алгебры чисел. С этой целью введем предикат

$$P_0(x, y, z) = x^0 y^0 z^0 \tag{1}$$

и предикат $P_k(x, y, z)$, соответствующий отношению $x \overset{k}{\vee} y = z$. Символом $\overset{k}{\vee}$ обозначена дизъюнкция понятий в алгебре чисел размерности $(k = 1,2,...)$. Предикат $P_{k+1}(x, y, z)$ соответствует отношению $x \overset{k+1}{\vee} y = z$. Символ $\overset{k+1}{\vee}$ обозначает дизъюнкцию понятий в алгебре чисел размерности k+1 Аргументы $P_k(x, y, z)$ предиката $P_k(x, y, z)$ заданы на множестве $\{0,1,..., 2k-1\}$. Предикат P_{k+1} можно выразить через предикат P_k с помощью следующей зависимости:

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x, y, z) = P_k(x, y, z) \vee P_k(x, y - 2^k, z - 2^k) \vee \\ \vee P_k(x - 2^k, y, z - 2^k) \vee P_k(x - 2^k, y - 2^k, z - 2^k). \end{aligned} \tag{2}$$

Первое слагаемое, стоящее в правой части равенства (2), задает значения операции $z = x \overset{k+1}{\vee} y$, содержащиеся в левой верхней четверти ее таблицы. Второе слагаемое задает правую верхнюю четверть таблицы. Появление разностей $y - 2^k$ и $z - 2^k$ на месте второго и третьего аргументов предиката P_k обусловлено тем, что все значения переменных y и z, связанные с ячейками правой верхней четверти таблицы, возрастают на величину 2^k по сравнению со значениями тех же переменных для соответствующих ячеек левой верхней четверти таблицы.

Третье слагаемое задает значения дизъюнкции понятий для левой нижней четверти таблицы, а четвертое – для правой нижней. Появление разностей на месте аргументов предиката P_k в этих слагаемых обусловлено ростом значений соответствующих переменных на величину 2^k по сравнению с их значениями для левой верхней четверти таблицы. Неявное задание дизъюнкции понятий для n-мерной алгебры чисел получаем, выражая по формуле (2) предикат P_n через предикат P_{n-1}, предикат P_{n-1} – через предикат P_{k-2} и т.д., пока не дойдем до предиката P_0, который выражаем по формуле (1).

В качестве примера найдем формулы, задающие в неявном виде дизъюнкцию понятий для 1- и 2-мерной алгебр чисел. Принимая $k = 0$, по формулам (2) и (1) находим:

$$P_1(x,y,z) = P_0(x,y,z) \vee P_0(x, y-2^0, z-2^0) \vee$$
$$\vee P_0(x-2^0, y, z-2^0) \vee P_0(x-2^0, y-2^0, z-2^0) =$$
$$= x^0y^0z^0 \vee x^0(y-1)^0(z-1)^0 \vee (x-1)^0y^0(z-1)^0 \vee$$
$$\vee (x-1)^0(y-1)^0(z-1)^0.$$

В АКП при любых натуральных значениях x, a, b имеет место следующее равенство:

$$(x-a)^b = x^{a+b}. \quad (3)$$

Действительно, если $(x-a)^b = 1$, то $x - a = b$, $x = a + b$, $x^{a+b} = 1$; если же $(x-a)^b = 0$, то $x - a \neq b$, $x \neq a + b$, $x^{a+b} = 1$. Из (3) получаем окончательное выражение, задающее в неявном виде дизъюнкцию понятий для 1-мерной алгебры чисел:

$$P_1(x,y,z) = x^0y^0z^0 \vee x^0y^1z^1 \vee x^1y^0z^1 \vee x^1y^1z^1.$$

Используя эту формулу для предиката P_1, с помощью (2) и (3) находим неявное задание дизъюнкции понятий для 2-мерной алгебры чисел:

$$P_2(x,y,z) = P_1(x,y,z) \vee P_1(x, y-2^1, z-2^1) \vee$$
$$\vee P_1(x-2^1, y, z-2^1) \vee P_1(x-2^1, y-2^1, z-2^1) =$$
$$= x^0y^0z^0 \vee x^0y^1z^1 \vee x^1y^0z^1 \vee x^1y^1z^1 \vee$$
$$\vee x^0(y-2)^0(z-2)^0 \vee x^0(y-2)^1(z-2)^1 \vee$$
$$\vee x^1(y-2)^1(z-2)^1 \vee (x-2)^0y^1(z-2)^1 \vee$$
$$\vee (x-2)^1y^0(z-2)^1 \vee (x-2)^1y^1(z-2)^1 \vee$$
$$\vee (x-2)^0(y-2)^0(z-2)^0 \vee (x-2)^0 \wedge$$
$$\wedge (y-2)^1(z-2)^1 \vee (x-2)^1(y-2)^0(z-2)^1 \vee$$
$$\vee (x-2)^1(y-2)^1 \wedge (y-2)^1(z-2)^1 = \vee x^0y^0z^0 \vee$$
$$\vee x^0y^1z^1 \vee x^1y^0z^1 \vee x^1y^1z^1 \vee x^0y^2z^2 \vee$$
$$\vee x^0y^3z^3 \vee x^1y^2z^3 \vee x^1y^3z^3 \vee x^2y^0z^2 \vee$$
$$\vee x^2y^1z^3 \vee x^3y^0z^3 \vee x^3y^1z^3 \vee x^2y^2z^2 \vee$$
$$\vee x^2y^3z^3 \vee x^3y^2z^3 \vee x^3y^3z^3.$$

2. 0-мерная алгебра чисел

При математическом описании дизъюнкции понятий в алгебре чисел был введен никак не интерпретируемый предикат P_0. Все остальные предикаты P_k ($k = 1,2,...$). были проинтерпретированы как дизъюнкция понятий в алгебре чисел размерности k. Было бы естественно рассматривать предикат P_0 в одном ряду с остальными предикатами $P_1, P_2, ...$ и интерпретировать его как дизъюнкцию понятий в алгебре чисел нулевой размерности. Это требует определения алгебры понятий нулевой размерности. Оно получено из определения алгебры понятий размерности n=1,2,... подстановкой вместо символа n числа 0.

Любую алгебраическую систему P_0, которая состоит из множества S_0, содержащего $2^0 = 1$ элемент, отношения равенства $x = y$ и операции $x \vee y$ ($x, y, x \vee y \in S_0$), назовем алгеброй понятий нулевой размерности, если для нее выполняются следующие условия:

1) $\forall x \in S_0 \;\; x \vee x = x$;

2) $\forall x, y \in S_0 \;\; x \vee y = y \vee x$;

3) $\forall x, y, z \in S_0 \;\; (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;

4) в множестве S_0 содержится элемент 0 такой, что для любого $x \in S_0 \;\; 0 \vee x = x$;

5) Из элемента 0 можно получить с помощью операции $\vee$ любой элемент множества S_0.

Приведенная формулировка определения алгебры понятий нулевой размерности допускает существенное упрощение. В самом деле, на множестве {0} можно определить лишь двуместную операцию. Она характеризуется равенством $0 \vee 0 = 0$. Только эта операция может быть принята в роли дизъюнкции понятий алгебры L_0. Эта операция обладает свойствами идемпотентности ($x \vee x = 0 \vee 0 = 0 = x$), коммутативности ($x \vee y = 0 \vee 0 = y \vee x$), ассоциативности ($(x \vee y) \vee z = (0 \vee 0) \vee 0 = 0 \vee 0 = 0 \vee (0 \vee 0) = x \vee (y \vee z)$) и нуля ($0 \vee x = 0 \vee 0 = 0 \vee x$). Поэтому требования 1) - 4) нет необходимости включать в определение алгебры понятий нулевой размерности. Требование 5) также вытекает из только что полученного прямого определения дизъюнкции понятий, согласно которому $0 = 0 \vee 0$. Таким образом, алгебру понятий нулевой размерности можно определить просто как любое одноэлементное множество с заданными на нем отношениями равенства и бинарной операцией. Ясно, что такая алгебра существует. Для построения формул алгебры L_0 используется единственный образующий символ 0, базисные символы в алгебре понятий нулевой размерности отсутствуют. Очевидно, что все алгебры понятий нулевой размерности изоморфны друг другу. Таким образом, алгебра L_0 единственна (с точностью до изоморфизма).

3. 1-мерная алгебра чисел

Отметим, что формулировку общего определения алгебры понятий можно упростить и для одномерного случая, однако это не удается сделать столь радикально, как при n = 0. Любая двуместная операция, заданная на двухэлементном множестве $S_1 = \{0,\ 1\}$, полностью определяется аксиомами идемпотентности, коммутативности и нуля. Действительно, по аксиоме нуля находим $0 \vee 0=0$, $0 \vee 1=1$. Из аксиомы коммутативности следует $1 \vee 0=0 \vee 1=1$. Аксиома же идемпотентности дает $1 \vee 1=1$. Мы пришли к операции дизъюнкции двоичных знаков, которая как известно, ассоциативна. Аксиома одномерности, очевидно, также выполняется. Таким образом, при $n=1$ аксиомы ассоциативности и одномерности логически выводимы из остальных аксиом, фигурирующих в определении понятия алгебры понятий произвольной размерности. Следовательно, эти две аксиомы можно исключить из определения одномерной алгебры понятий. Мы приходим к следующему определению. Одномерной алгеброй понятий называем любую алгебраическую систему, состоящую из двухэлементного множества S_1, отношения равенства $x = y$ и операции $x \vee y$ ($x, y, x \vee y \in S_1$), если для нее при любом $x \in S_1$ $x \vee x = x$, $0 \vee x = x$ и при любых $x, y \in S_1$ $x \vee y = y \vee x$.

Оказывается, что аксиомы идемпотентности, коммутативности и нуля, фигурирующие в только что сформулированном определении, логически не зависят друг от друга. Докажем это. Принимаем $S_1=\{0,\ 1\}$. Определим дизъюнкцию понятий как неравнозначность двоичных знаков $x \vee y = x \oplus y$. Такая операция не удовлетворяет аксиоме идемпотентности ($1 \oplus 1=0$), но подчиняется аксиоме коммутативности ($x \oplus y = y \oplus x$) и аксиоме нуля ($0 \oplus x = x$). Далее, определяя дизъюнкцию понятий как функцию $x \vee y = y$, видим, что она некоммутативна ($0 \vee 1=1$, $1 \vee 0=0$), но идемпотентна ($x \vee x = x$) и удовлетворяет аксиоме нуля ($0 \vee y = y$). Наконец, принимая в роли дизъюнкции понятий конъюнкцию двоичных знаков $x \vee y = xy$, находим, что она идемпотентна ($xx = x$) и коммутативна ($xy = yx$), но не подчиняется аксиоме нуля ($0 \cdot 1 = 0$). Итак, мы доказали независимость аксиом идемпотентности, коммутативности и нуля друг от друга. Поэтому ни одна из этих аксиом не может быть исключена из приведенного выше определения одномерной алгебры понятий.

В двумерном случае ни одну из пяти аксиом невозможно исключить из определения алгебры понятий. Нельзя обойтись в определении двумерной алгебры понятий и без требования четырехэлементности множества S_2. Докажем это. Для доказательства независимости аксиомы ассоциативности определим операцию дизъюнкции понятий табл. 2. Для нее аксиома ассоциативности не выполняется, поскольку $(1 \vee 2) \vee 2=3 \vee 2=0$, но $1 \vee (2 \vee 2)=1 \vee 2=3$. Вместе с тем, аксиомы идемпотентности, коммутативности и нуля, как явствует из табл. 2, выполняются.

Таблица 2

Операция $x \vee y$

x \ y	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	0
2	2	3	2	0
3	3	0	0	3

Выберем в качестве базисных понятий элементы 1 и 2. Так как $1 \vee 2=3$, то аксиома двухмерности выполняется. Множество S_2 четырехэлементно. Итак, аксиома ассоциативности невыводима из остальных свойств двумерной алгебры понятий.

Для доказательства независимости аксиомы двумерности принимаем в роли дизъюнкции понятий дизъюнкцию четырехзначной логики $x \vee y = \max(x, y)$. Как известно, она коммутативна, ассоциативна и идемпотентна. Для нее выполняется и аксиома нуля. Множество S_2 четырехэлементно. Однако, аксиома двумерности не выполняется. Это обусловлено тем фактором, что в каждой дизъюнкции четырехзначной логики $a = x \vee y$, выражающей произвольно выбранный элемент $a \in S_2$, хотя бы одно из слагаемых x или y обязательно должно совпадать с элементом a. Например, элемент 3 можно представить только следующими дизъюнкциями четырехзначной логики: $3=0 \vee 3=3 \vee 0=1 \vee 3=3 \vee 1= = 2 \vee 3=3 \vee 2=3 \vee 3$. В каждой из этих дизъюнкций обязательно присутствует элемент 3. Таким образом, в данном случае существует единственный базис {1, 2, 3}, число элементов которого не совпадает с числом 2, как того требует аксиома двухмерности.

Четырехэлементность носителя S_2 двумерной алгебры понятий не вытекает из совокупности всех остальных свойств этой алгебры. Чтобы доказать это утверждение, определим операцию дизъюнкции понятий табл. 3.

Таблица 3

Переопределенная операция $x \vee y$

x \ y	0	2	3
0	0	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

Нетрудно убедиться в том, что все пять аксиом в данном случае выполняются, однако число элементов в множестве S_2 не равно четырем. Независимость аксиом идемпотентности, коммутативности и нуля непосредственно вытекает из их независимости в одномерной алгебре понятий. Итак, мы доказали, что при n = 2 все шесть рассмотренных выше условий независимы друг от друга, и поэтому их число не может быть уменьшено в определении алгебры понятий. Полученный результат распространяется на любые алгебры понятий произвольной размерности n > 2. Отметим, что формулировка аксиомы n-мерности допускает некоторое упрощение, а именно, из нее можно исключить требование попарного различия образующих понятий 0, $e_1, e_2, ..., e_n$. Дело в том, что, согласно теореме о стандартной форме, число всех понятий в множестве S_n не может превысить величины 2^t, где t – число всех различных ненулевых базисных понятий. Если бы некоторые из базисных понятий, фигурирующих в определении n-мерной алгебры понятий совпали друг с другом или с нулем, то оказалось бы, что $t < n$. Но этот вывод противоречит требованию 2^t-элементности множества S_n. Таким образом, условие попарного различия образующих понятий вытекает из совокупности всех остальных свойств, присутствующих в определении n-мерной алгебры понятий. С учетом сказанного аксиома n-мерности может быть записана в следующей более простой формулировке: «В множестве S_n содержатся такие элементы $e_1, e_2, ..., e_n$, что из них и из элемента 0 можно с помощью операции $\vee$ получить любой элемент множества S_n».

Опишем на языке АКП в форме неявного задания операцию k-значной дизъюнкции (k=1,2,...). С этой целью введем предикат $Q_k(x)$, задающий область определения k-значных переменных {0,..., k-1}. Предикат Q_{k+1} выражается через предикат Q_k следующим образом:

$$Q_{k+1}(x) = Q_k(x) \vee x \vee k . \quad (4)$$

Полагаем, что

$$Q_1(x) = x^0 . \quad (5)$$

Введем, кроме того, предикат $R_k(x, y, z)$, соответствующий отношению $x \underset{k}{\vee} y = z$. Символ $\underset{k}{\vee}$ обозначает операцию k-значной дизъюнкции: $x \underset{k}{\vee} y = z$. Предикат R_{k+1} выражается через предикат $R_k(x, y, z)$ следующим образом:

$$R_{k+1}(x, y, z) = R_k(x, y, z)Q_{k+1}(x)y^k z^k \vee \vee x^k Q_{k+1}(y)z^k. \quad (6)$$

Полагаем, что

$$R_1(x, y, z) = x^0 y^0 z^0 . \quad (7)$$

Сравнение между собой формул (1) и (2), описывающих операцию понятий для алгебры чисел, с формулами (4)-(7), описывающими дизъюнкцию чисел для многозначной логики, показывает, что эти операции сильно отличаются друг от друга по своему строению. Это говорит о существенном отличии алгебры понятий от любой алгебры многозначной логики, в которой дизъюнкция используется в роли базисной операции.

Вывод

В работе изучены некоторые свойства алгебры понятий. С этой целью рассмотрены числовые интерпретации алгебры понятий - алгебры чисел разного порядка. Проанализированы алгебры чисел нулевой, первой и n-й размерности.

Список литературы

1. *Голян Н.В. О свойствах канонической алгебры понятий / Н.В. Голян // Системи управління, навігації та зв'язку. – П.: ПНТУ, 2016. – Вип. 4(40). – С. 44-47.*
2. *Голян Н.В. Изоморфизм и интерпретации алгебр понятий / Н.В. Голян // Системи управління, навігації та зв'язку. – П.: ПНТУ, 2017. – Вип. 1(41). – С. 82-85.*
3. *Нильсон Н. Принципы искусственного интеллекта / Н. Нильсон. – М.: Радио и связь, 1985. – 376 с.*
4. *Бондаренко М.Ф. Теория интеллекта. Учебник / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Х.: СМИТ, 2007 – 576 с.*

Надійшла до редколегії 6.02.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.В. Шостак, Національний аерокосмічний університет імені М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків.

ЧИСЛОВІ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ АЛГЕБРИ ПОНЯТЬ

А.І. Коваленко, М.С. Широкопетлева

У роботі вивчаються властивості алгебри понять. З цією метою розглянуті числові інтерпретації алгебри понять - алгебри чисел різного порядку. Проаналізовані алгебри чисел нульової, першої і n-ї розмірності.

Ключові слова: *алгебра скінченних предикатів, алгебра понять, канонічна алгебра, ізоморфізм, інтерпретації алгебри, алгебраїчна система, багатозначна логіка.*

CONCEPTS ALGEBRA NUMERICAL INTERPRETATIONS

A.I. Kovalenko, M.S. Shyrokopetleva

Properties of concepts algebra are in-process studied. Numerical interpretations of concepts algebra - numbers algebra of different order are considered. Numbers algebras of zero, first and n dimensions are analysed.

Keywords: *finite predicates algebra, algebra of concepts, canonical algebra, isomorphism, algebra interpretations, algebraic system, multiple-valued logic.*