УДК 629.1

М.Л. Шуляк

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенка, Харьков

ОБҐРУНТУВАННЯ ВИБОРУ ПОВЕРХНІ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ ОБЛАСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ ТРАНСПОРТНОГО АГРЕГАТУ, ЩО ЗАДАЄТЬСЯ РАДІУС-ВЕКТОРАМИ ЙОГО ПРИСКОРЕННЯ

Моделювання роботи транспортного агрегату за допомогою вектора прискорення дозволяє оцінювати як енергозбереження, так і функціональну стабільність. Отримані експериментальним шляхом радіус-вектори прискорення утворюють область функціонування транспортного агрегату, за об'ємом якої можливо порівнювати різні режими роботи агрегату. Апроксимація області функціонування транспортних агрегатів, на основі поверхні другого порядку – еліпсоїда, дозволяє математично досліджувати витрати енергії при роботі агрегату. В роботі проаналізовані різні види еліпсоїдів та обрано найбільш придатний для вирішення поставленої задачі.

***Ключевые слова**: трактор, прискорення, апроксимація, поверхня, еліпсоїд.*

Вступ

Моделювання транспортної операції, а саме функціонування трактора та машини, що транспортується є складним об'єктом, що параметризуються великим числом змінних. На значення цих змінних накладається безліч обмежень, пов'язаних з геометричними особливостями і властивостями, як об'єктів, так і умов самого процесу, що моделюються.

Аналіз джерел інформації. Для ефективної апроксимації області функціонування транспортних машин та агрегатів можливо застосувати методи зниження розмірності. При їх застосуванні множина допустимих значень змінних в вихідному просторі переходить в допустиму множину в просторі меншої розмірності. При такому перетворенні структура і властивості допустимої множини можуть істотно ускладнитися. Тим більше при переході в стислий простір втрачається інформація про властивості функціонування. У зв'язку з цим актуальною є задача апроксимації наявного набору даних, що належить допустимій множині, будь-якими простішими геометричними тілами. В роботах [1, 2] запропоновано апроксимувати область функціонування за допомогою поверхні другого порядку – еліпсоїда, але виникає питання обґрунтування саме такого вибору з наукової точки зору.

Мета роботи. Обґрунтувати вибір еліпсоїда як поверхні апроксимації області функціонування ТА.

Основна частина

Емпірична залежність компонент прискорення транспортного агрегату представлена, як сукупність радус-векторів, що характеризують переміщення в просторі. Їх кінці формують собою кінцевий набір точок фазового простору, а допустима множина є випуклим багатогранником [3]. Найпростіший в реалізації метод апроксимації - паралелепіпед з гранями паралельними координатним площинам, має недолік, проілюстрований на (рис. 1). У разі, якщо дані утворюють нахилене вузьке облако, усередині паралелепіпеда є великі області, які не відповідають реальним об'єктам. З ростом розмірності, обсяг «корисна множина» всередині паралелепіпеда зменшується експоненціально [4].

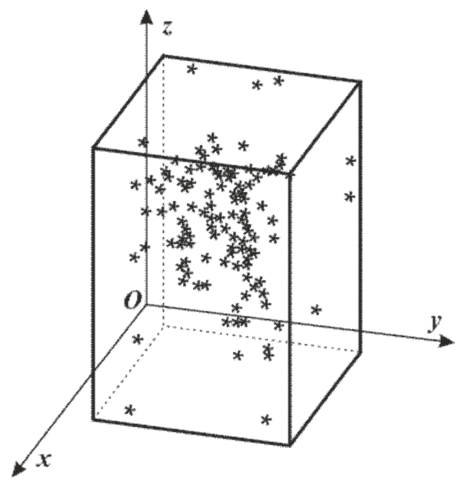

Рис. 1. Прямокутний паралелепіпед – грубе і неефективне наближення даних

Інший можливий підхід пов'язаний з побудовою випуклої оболонки даних. Побудова випуклої оболонки – обчислювально складна задача [5]. Крім того, випукла оболонка може мати досить складну структуру, що не дозволяє ефективно з нею працювати.

Для встановлення закономірностей будь-яких явищ проводяться експериментальні дослідження, в ході яких вимірюють значення тих чи інших величин. При проведенні будь-якого експерименту використовуються прилади різного ступеня точності. Тому результати будь-якого вимірювання завжди містять помилки і похибки. Як правило, при вирішенні прикладних задач необхідно визначити точкові та інтервальні оцінки параметрів функцій відомого виду за отриманими експериментальними даними. У цьому випадку застосовують метод центру невизначеності (МЦН) [4]. При невеликому числі вимірювань досить точні моделі дозволяє отримати метод інтервальної оцінки параметрів трипараметричного полінома, що враховує апріорну інформацію про помилки вимірювань безпосередньо при розрахунках. Завдання належить до класу апроксимації з метою побудови однієї загальної кривої, що проходить через всі задані точки. Існує два випадки: апроксимуюча крива проходить через точки заданої функції в вузлах; крива може не проходити через точки, задані таблицею, але відхилення від них мінімально. В обох випадках намагаються мінімізувати відхилення. Складність полягає в тому, що значення координат точок задані у вигляді інтервалів. Щоб обійти подібне використовують метод центру невизначеностей, де фігурою, яка оцінює розкид параметрів апроксимуючих функцій, є еліпсоїд.

У зв'язку з цим вельми перспективним напрямком апроксимації є поверхня другого порядку – еліпсоїд, оскільки він позбавлений багатьох з перерахованих вище недоліків. Проте існує багато різних еліпсоїдів та методів їх побудови, завдання полягає в знаходженні «хорошого» еліпсоїда, що належить допустимій множині, та містить більшість точок вибірки і має найменший об’єм. Для апроксимації множини експериментальних векторів запропоновано кілька підходів з використанням різних еліпсоїдів. Ряд цих еліпсоїдів отримують при проведенні серії експериментів. В даний час відомо кілька класичних еліпсоїдів [4]. Завдання оптимізації формулюються у вигляді задач випуклого програмування з обмеженнями виду лінійних матричних нерівностей.

Деякі еліпсоїди (еліпсоїд мінімального об'єму, який містить всі задані точки) в своєму класичному формулюванні не враховує наявність допустимої множини. Для випадку, коли допустима множина є випуклий багатогранник, запропонована процедура «вписування» еліпсоїдів в допустиму множину. Необхідною умовою застосування еліпсоїда мінімального об’єму є потрапляння мінімум точок за межі поверхні апроксимації [4].

Рівняння еліпсоїда матиме вид:

$$E = \left\{ x_{\vec{a}} \middle| \left(x_{\vec{a}} - \hat{I}\right)^T P_{\vec{a}}^{-1}\left(x_{\vec{a}} - \hat{I}\right) \le 1 \right\}, \qquad (1)$$

де $x_{\vec{a}}$ – кінець радіус-вектора повного прискорення агрегату; $\hat{I}$ – центр еліпсоїда, для ідеального випадку співпадає з початком системи координат, $P_{\vec{a}}$ – його матриця.

Запропоновані методи відрізняються різними підходами до визначення центру і матриці еліпсоїда.

Є вибірка точок:

$$X_{\vec{a}} = \left\{x_{\vec{a}i}\right\}_i^N, x_{\vec{a}i} \in R^d. \qquad (2)$$

Допустиме множина є випуклий багатокутник, заданий системою лінійних нерівностей.

Розглянемо еліпсоїди, які будуються виключно на множині точок і не враховують накладаються на них обмеження та еліпсоїди, які добре описують багатогранник, але можуть погано описувати множину точок. Для виправлення цих недоліків була розроблена додаткова процедура, яка змінює параметри еліпсоїда таким чином, що він належить допустимій множині, і краще описує облако точок.

Еліпсоїд головних компонент описує множину точок матрицею головних компонент (рис. 2).

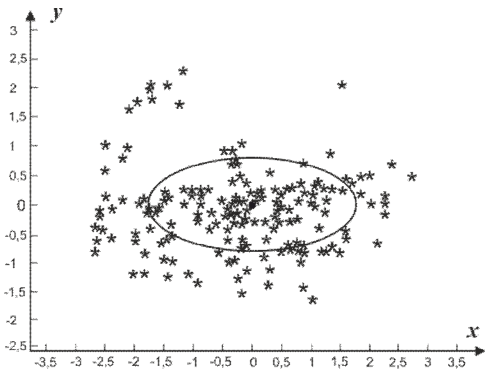

Рис. 2. Еліпсоїд головних компонент

Центром еліпсоїда головних компонент є середнє арифметичне точок вибірки:

$$O = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{\vec{a}i}. \qquad (3)$$

а матрицею еліпсоїда є коваріаційна матриця вибірки:

$$P_{\vec{a}}^{-1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{\vec{a}i} - O\right)\left(x_{\vec{a}i} - O\right)^T. \qquad (4)$$

Еліпсоїд мінімального об'єму. У неформальній постановці завдання було відмічено, що одним з критеріїв «якості» еліпсоїда є його невеликий об'єм. Тому сформулюємо і вирішимо завдання знаходження еліпсоїда мінімального об'єму, що містить всі задані точки вибірки (рис. 3).

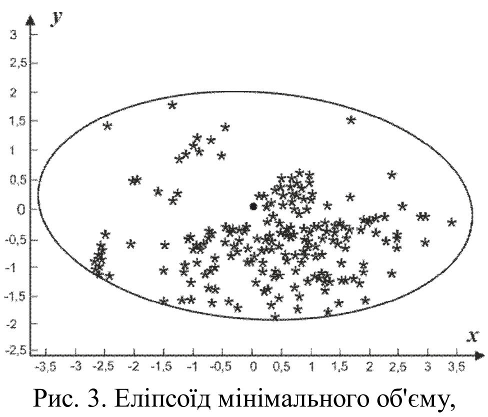

Рис. 3. Еліпсоїд мінімального об'єму, що містить заданий точки

Об'єм еліпсоїда обчислюється за формулою:

$$\mathrm{vol}(E) = w_n\left(\det P_{\vec{a}}\right)^{1/2}, \qquad (5)$$

де w_n - об'єм одиничного n-мірного шара.

Тому оптимізаційна задача для знаходження даного еліпсоїда має вигляд [6]:

$$\min_{P_{\bar{a}},O}\left(\det P_{\bar{a}}\right) \text{s.t.} \left(x_{\bar{a}i} - O\right)^T P_{\bar{a}}^{-1}\left(x_{\bar{a}i} - O\right) \le 1, \quad i = 1...N. \qquad (6)$$

За допомогою леми Шура і заміни змінних $Q = P_{\bar{a}}^{-1/2}$ и $b = P_{\bar{a}}^{-1/2} \cdot O$ її можна переписати з використанням лінійних матричних нерівностей у вигляді задачі лінійного програмування:

$$\min_{Q,b} - \operatorname{Ln}\det Q$$
$$\text{s.t.}\begin{bmatrix} 1 & \left(Qx_{\bar{a}i} - b\right)^T \\ Qx_{\bar{a}i} - b & 1 \end{bmatrix} \ge 0, i = 1...N, \qquad (20)$$

Функція $-\operatorname{Ln}\det Q$ є випуклою [7].

Еліпсоїд з мінімальним слідом його матриці будувався через мінімізацію детермінанта. Спорідненої до цього завдання є завдання мінімізації сліду матриці еліпсоїда (рис. 4):

$$\min_{P_{\bar{a}},c}\left(\operatorname{tr} P_{\bar{a}}\right) \text{s.t.} \left(x_{\bar{a}i} - O\right)^T P_{\bar{a}}^{-1}\left(x_{\bar{a}i} - O\right) \le 1, \quad i = 1...N. \qquad (21)$$

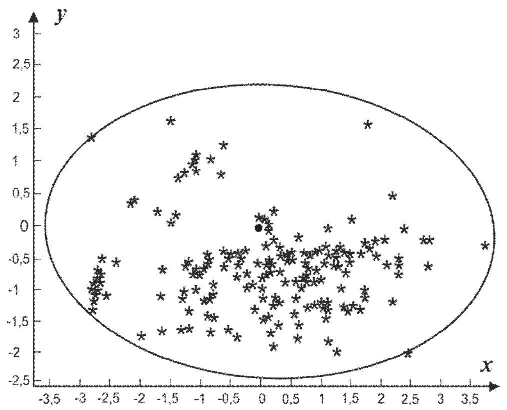

Рис. 4. Еліпсоїд з мінімальним слідом його матриці

За допомогою леми Шура обмеження можуть бути записані у вигляді системи лінійних матричних нерівностей:

$$\begin{bmatrix} P_{\bar{a}} & x_{\bar{a}i} - c \\ \left(x_{\bar{a}i} - c\right)^T & 1 \end{bmatrix} \ge 0, \quad i = 1...N, \qquad (22)$$

Еліпсоїд максимального об'єму (рис. 5). Для опису многогранника може бути використаний еліпсоїд, що належить многограннику, і має максимальний об'єм. Нехай многогранник задається системою лінійних нерівностей:

$$a_k^T x_{\bar{a}} \le b_k, k = 1...M, \qquad (23)$$

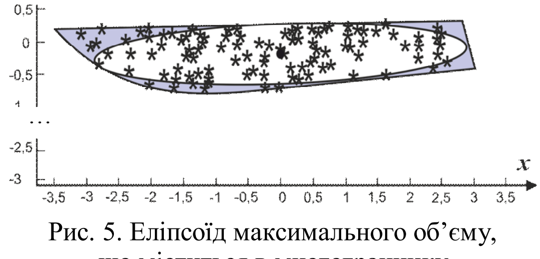

Рис. 5. Еліпсоїд максимального об'єму, що міститься в многограннику

Тоді поставлену задачу можна сформулювати наступним чином [5]:

$$\min_{B,O} - \log\det B$$
$$\text{s.t.}\begin{bmatrix} \left(b_k - a_k^T O\right) I & Ba_k \\ \left(Ba_k\right)^T & \left(b_k - a_k^T O\right) \end{bmatrix} \ge 0, \qquad (24)$$

де матриця B виражається через матрицю еліпсоїда $B = P_{\bar{a}}^{1/2} > 0$.

Еліпсоїд Дікина (рис. 6). Для системи лінійних нерівностей (23), яка задає не порожній обмежений многогранник розглянемо логарифмічну бар'єрну функцію:

$$\phi\left(x_{\bar{a}}\right) = -\sum_{k=1}^{M} \log\left(b_k - a_k^T x\right), \qquad (25)$$

Точка $x_{\bar{a}\hat{i}}$, в якій ця функція досягає мінімуму, називається аналітичним центром многогранника.

Гесіан бар'єрної функції розраховується за формулою:

$$H\left(x_{\bar{a}}\right) = \nabla^2 \phi\left(x_{\bar{a}}\right) = \sum_{k=1}^{M} d_k^2 a_k a_k^T, \qquad (26)$$

де $d_k = \dfrac{1}{b_k - a_k^T x_{\bar{a}}}$.

Еліпсоїдом Дікина називається еліпсоїд з центром в точці $x_{\bar{a}\hat{i}}$ і матрицею $\left(H\left(x_{\bar{a}\hat{i}}\right)\right)^{-1}$.

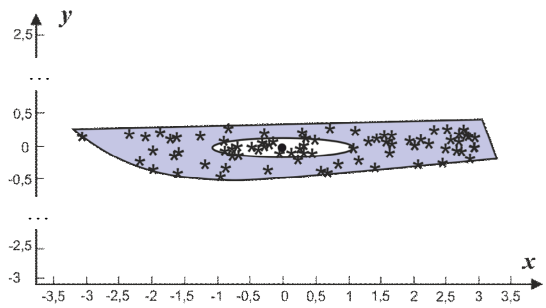

Рис. 6. Эллипсоид Дикина

Якщо многогранник має витягнуту форму, то таким же буде і еліпсоїд. Недоліком еліпсоїда Дікина є залежність вирішення оптимізаційної задачі від залежних нерівностей у системі.

У просторах малої розмірності таких нерівностей може бути багато. Тому необхідно перед побудовою еліпсоїда Дікина відфільтрувати залежні нерівності, щоб еліпсоїд описував реальний многогранник.

Як вказувалося, у процесі побудови деяких еліпсоїдів не беруть до уваги многогранник існуючих обмежень, а при побудові інших еліпсоїдів враховується тільки цей многогранник.

Розглянуто порівняння еліпсоїдів за двома критеріями: об'єму і кількості точок, які не містяться в еліпсоїді (табл 1). Розглянуто кілька класичних підходів до пошуку «хорошого» еліпсоїда. Однак можна розглянути задачу двухкрітеріальної мінімізації об'єму і кількості виключених з еліпсоїда точок вибірки за умови, що еліпсоїд належить многограннику.

Таблиця 1

Порівняння еліпсоїдів
для апроксимації множини

Еліпсоїд	Об'єм	n
Еліпсоїд головних компонент	$0{,}1286 \cdot 10^3$	15
Еліпсоїд мінімального об'єму	$0{,}561 \cdot 10^2$	26
Еліпсоїд з мінім. слідом матриці	$0{,}839 \cdot 10^2$	26
Еліпсоїд максимального об'єму, що міститься в многограннику		
– доп. паралелепіпед в вихідному просторі	$0{,}613 \cdot 10^2$	5
– доп. паралелепіпед в стиснутому просторі	$0{,}1057 \cdot 10^3$	49
Еліпсоїд Дікина (доп. паралелепіпед в вихідному просторі)	$0{,}577 \cdot 10^3$	15

n – кількість точок за межами поверхні апроксимації

Проаналізувавши порівняння еліпсоїдів для апроксимації множини можливо підкреслити основні, що відповідають вимогам даного дослідження. Найбільш прийнятними для застосування є еліпсоїди з номерами 1, 2, 4, бо вони домінують над іншими як по показникам об'єму так і по кількості точок вибірки, що знаходяться поза межами поверхні апроксимації. Для практичного застосування необхідно спростити апроксимацію результатів дослідження базуючись на проведеному пошуку «хорошого» еліпсоїда. Для порівняльних досліджень наявність кількох методик апроксимації з різним кінцевим результатом по об'єму може привести до протиріч в оцінці того чи іншого режиму, чи агрегату, тому запропоновано в подальшому застосовувати «Еліпсоїд мінімального об'єму».

Висновки

Результатами дослідження виявлено, що найкраще апроксимує область функціонування ТА поверхня другого порядку – еліпсоїд. Аналіз різних, за методами побудови еліпсоїдів дозволяє стверджувати, що «Еліпсоїд мінімального об'єму» найбільш доцільно використовувати для оцінки функціонування ТА та вибору раціональних режимів його роботи.

Список літератури

1. Шуляк М.Л. Область функціонування машино-тракторного агрегату, що апроксимована поверхнею другого порядку / М.Л. Шуляк // Технічні науки: зб. наук. праць ВНАУ. – Вінниця, 2016. – Вип. 1(93), т. 1. – С. 28 – 31.

2. Шуляк М.Л. Вибір раціонального режиму роботи МТА на основі аналізу еліпсоїда функціонування / М.Л. Шуляк // Інженерія природо користування – 2016. – № 2 (6). – С. 99 – 104..

3. Шуляк М.Л. Оцінка функціонування сільськогосподарського агрегату за динамічними критеріями / М.Л. Шуляк, А.Т. Лебедєв, М.П. Артьомов, Є.І. Калінін // Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів – 2016. – № 4. – С. 218 – 226.

4. Бедринцев А. А. Представление данных с помощью минимальных эллипсоидов / А. А. Бедринцев, В. А. Чепыжов. // Труды 56-й научной конф. Управление и прикладная математика. – М.: МФТИ, 2013.– С. 55 – 60.

5. Stephen Boyd et al., Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM studies in applied mathematics ; vol. 15, 1994.

6. C. Bradford Barber et al., The Quickhull Algorithm for Convex Hull, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 22, No. 4, 1996, pp. 469-483.

7. Boyd S., Convex Optimization, Cambridge UniversityPress, 2004.

Надійшла до редколегії 14.02.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Т. Лебедєв, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П. Василенка, Харків.

ОБОСНОВАНИЕ ВЫБОРА ПОВЕРХНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ОБЛАСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНОГО АГРЕГАТА, ЗАДАЮЩЕЙСЯ РАДИУС-ВЕКТОРОМ ЕГО УСКОРЕНИЯ

М.Л. Шуляк

Моделирование работы транспортного агрегата с помощью вектора ускорения позволяет оценивать как энергосбережение, так и функциональную стабильность. Полученные экспериментальным путем радиус-вектора ускорения образуют область функционирования транспортного агрегата. по объему которой можно сравнивать различные режимы работы агрегата. Аппроксимация области функционирования транспортных агрегатов, на основе поверхности второго порядка – эллипсоида, позволяет математически исследовать затраты энергии при работе агрегата. В работе проанализированы различные виды эллипсоидов и выбран наиболее подходящий для решения поставленной задачи.

***Ключевые слова**: трактор, ускорение, аппроксимация, поверхность, эллипсоид.*

SUBSTANTIATION OF THE SURFACE SELECTION FOR THE APPROXIMATION OF THE REGION OF FUNCTIONING OF THE TRANSPORT UNIT, WHICH IS DETERMINED BY THE RADIUS VECTOR OF THE TOTAL ACCELERATION

M.L Shulyak

Modeling the work of the transport aggregate with the help of the acceleration vector, allowing to estimate energy saving and functional stability. The acceleration radius vectors obtained experimentally form the area of functioning of the transport unit by volume of which it is possible to compare the various modes of operation of the unit. Approximation of the area of functioning of transport units, in the basis of the second order surface - ellipsoid, permitting mathematically to explore the energy loss in the work unit. In this article, various types of ellipsoids are analyzed and the chosen one most suitable for the solution of this problem.

***Keywords:** tractor, acceleration, approximation, surface, ellipsoid.*