УДК 529.85

Л.Г. Раскин, В.В. Карпенко

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

НЕЧЕТКАЯ ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ

Рассмотрена задача маршрутизации высокой размерности в условиях, когда исходные данные заданы нечетко. Предложен декомпозиционный алгоритм решения задачи, использующий кластеризацию исходного множества пунктов. Основой алгоритма является технология сравнения нечетких чисел с целью выбора минимального из них, обеспечивающая возможность кластеризации. Проведен анализ двух альтернативных методов сравнения. Приведен пример.

Ключевые слова: *маршрутизация, задача коммивояжера высокой размерности, декомпозиция, нечеткие исходные данные.*

Введение

Задача маршрутизации входит в широкий класс проблем логистики и состоит в отыскании маршрута, соединяющего два заданных пункта с учетом имеющихся магистралей. Традиционные критерии для выбора наилучшего маршрута: длина пути или затраты (временные, стоимости и т.п.) на его преодоление. Частный случай этой задачи возникает, если маршрут обязательно должен проходить через заданное множество пунктов. Такая задача носит специальное название – задача коммивояжера [1, 2]. Трудности решения этой задачи зависят от её размерности, а также от уровня качества исходной информации. Приведем краткий анализ известных методов решения задачи коммивояжера.

Анализ литературных данных

Функциональная постановка задачи коммивояжера имеет вид [1, 2]: найти булеву матрицу $X = (x_{ij})$, доставляющую минимум линейной форме

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},,$$

компоненты которой удовлетворяют ограничениям:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n};\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ i = \overline{1,n};$$

$$u_i - u_j + nx_{ij} \le n-1,\quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n},$$

где n – число пунктов, c_{ij} – расстояние между пунктами $(i, j),$; x_{ij} – булев индикатор, равный единице, если в маршруте имеется звено, соединяющее непосредственно пункты (i, j), и равный нулю в противном случае. Выполнение ограничений обеспечивает получение замкнутого маршрута без петель [3].

Эта задача принадлежит к классу трудных комбинаторных, так называемых NP-полных задач. Эффективность известных алгоритмы её решения невелика – решение может быть получено только для задач сравнительно небольшой размерности ($n > 20$). Однако, на практике возникает необходимость решения этой задачи существенно более высокой размерности. Эффективное решение задачи возможно с использованием генетического алгоритма (ГА) [4, 6]. Результаты экспериментального решения задачи коммивояжера различной размерности этим алгоритмом представлены в табл. 1 [7].

Таблица 1

Зависимость времени поиска кратчайшего маршрута (в условных единицах) от количества пунктов при использовании ГА

Количество пунктов	10	18	26	34	42
Время решения	1	8	23	50	90
Количество пунктов	50	58	66	74	80
Время решения	195	285	401	597	780

Для аналитического описания этой зависимости в [7] введена модель

$$T(n) = an^b. \quad (1)$$

Параметры модели найдены методом наименьших квадратов.

После логарифмирования (1):

$$\ln T(n) = \ln a + b \ln n.$$

С использованием обозначений $y = \ln T(n)$, $b_0 = \ln a$, $b_1 = b$, $x = \ln n$ получено линейное относительно параметров b_0 и b_1 уравнение регрессии $y = b_0 + b_1 x$. Далее, для m вариантов исходных данных имеем

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \ln n_1 \\ 1 & \ln n_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & \ln n_m \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix},\quad Y = \begin{pmatrix} \ln T(n_1) \\ \ln T(n_2) \\ \dots \\ \ln T(n_m) \end{pmatrix}.$$

При этом функционал наименьших квадратов имеет вид $I=(AB-Y)^T(AB-Y)$, а минимизирующий этот функционал вектор $\hat{B}$ определяется соотношением

$$\hat{B}=\left(H^TH\right)^{-1}H^TY=\begin{pmatrix}\hat{b}_0\\ \hat{b}_1\end{pmatrix},\ a=e^{\hat{b}_0},\ b=\hat{b}_1.$$

После выполнения расчетов по данным из табл. 1 получена искомая зависимость: $T=0,0009n^{3,1332}$.

Таким образом, генетический алгоритм решения задачи коммивояжера существенно более эффективен, нежели любой другой известный алгоритм решения *NP*-полных задач. Предельная размерность задачи для этого алгоритма составляет 80-100 пунктов назначения [7]. Однако, решение этой задачи возможно получить приближенно даже для случая существенно более высокой размерности с использованием декомпозиции [8].

Предлагаемая при этом технология решения задачи коммивояжера является четырехэтапной. На первом этапе все множество пунктов обхода с использованием какого-либо алгоритма кластеризации разделяется на совокупность кластеров. Для каждого кластера отыскиваются координаты центров тяжести. На втором этапе для этих точек строится кратчайший маршрут их обхода. На следующем этапе для каждой пары "соседних" кластеров отыскивается пункт выхода из предыдущего кластера и пункт входа в последующий. Наконец, на последнем этапе решается последовательность задач коммивояжера для каждого из кластеров с учетом полученных на предыдущем этапе начального и конечного пунктов. В результате будет получена последовательность маршрутов, объединение которых образует искомый маршрут.

Применение декомпозиционной процедуры существенно снижает размерность решаемых на этапе 2 и 4 частных задач по сравнению с исходной. Это обстоятельство расширяет возможности генетического алгоритма для решения задачи коммивояжера до 500-600 пунктов.

Реализация описанной технологии существенно усложняется, если исходные данные (расстояния между пунктами) заданы нечетко. Сформулируем задачи, порождаемые этой особенностью исходных данных.

Постановка задачи

Важнейшим конструктивным элементом процедуры кластеризации является сравнение расстояний между точками, соответствующими объектам кластеризации и центрами группирования [9]. Расчет расстояний усложняется, если они заданы нечетко своими функциями принадлежности. Известны различные способы сравнения нечетких чисел с целью выбора минимального из них [10]. Общий недостаток – сложность программной реализации, которая быстро растет с увеличением размерности задачи. В связи с этим поставим задачу построения простых, но достаточно эффективных приемов решения задачи сравнения нечетких чисел.

Основные результаты

Пусть два нечетких числа x_1 и x_2 заданы, например, треугольными функциями принадлежности.

$$M_1(x_1)=\begin{cases}0, & x_1<a_1,\\ \dfrac{x_1-a_1}{c_1-a_1}, & a_1\le x_1<c_1,\\ \dfrac{b_1-x_1}{b_1-c_1}, & c_1\le x_1<b_1,\\ 0, & x_1\ge b_1,\end{cases}$$

$$M_2(x_2)=\begin{cases}0, & x_2<a_2,\\ \dfrac{x_2-a_2}{c_2-a_2}, & a_2\le x_2<c_2,\\ \dfrac{b_2-x_2}{b_2-c_2}, & c_2\le x_2<b_2,\\ 0, & x_2\ge b_2.\end{cases}\qquad(2)$$

Зададим набор уровней принадлежности $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$. Рассчитаем значения нечетких переменных x_1 и x_2 соответствующие выбранным уровням принадлежности. С этой целью решим уравнения:

$$M_1(x_1)=\alpha_k,\quad M_2(x_2)=\alpha_k,\quad k=1,2,...,m.$$

Имеем

$$\frac{x_1-a_1}{c_1-a_1}=\alpha_k,\quad x_{1k}^{(1)}=a_1+\alpha_k(c_1-a_1),$$

$$\frac{b_1-x_1}{b_1-c_1}=\alpha_k,\quad x_{1k}^{(2)}=b_1-\alpha_k(b_1-c_1),$$

$$\frac{x_2-a_2}{c_2-a_2}=\alpha_k,\quad x_{2k}^{(1)}=a_2+\alpha_k(c_2-a_2),$$

$$\frac{b_2-x_2}{b_2-c_2}=\alpha_k,\quad x_{2k}^{(2)}=b_2-\alpha_k(b_2-c_2).$$

Далее определим значения середин отрезков:

$$[x_{1k}^{(1)},x_{1k}^{(2)}],\ [x_{2k}^{(1)},x_{2k}^{(2)}],\quad k=1,2,...,m.$$

Получим

$$\bar{x}_{1k}=\frac{1}{2}\left(x_{1k}^{(1)}+x_{1k}^{(2)}\right)=\frac{a_1+b_1}{2}+\frac{\alpha_k}{2}\left(-a_1-b_1+2c_1\right),$$

$$\bar{x}_{2k}=\frac{1}{2}\left(x_{2k}^{(1)}+x_{2k}^{(2)}\right)=\frac{a_2+b_2}{2}+\frac{\alpha_k}{2}\left(-a_2-b_2+2c_2\right).$$

Теперь уровень предпочтения нечеткого числа x_2 перед нечетким числом x_1 можно определить значением критерия

$$\eta = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (\overline{x}_{2k} - \overline{x}_{1k}). \qquad (3)$$

Естественно считать, что число x_2 "больше" числа x_1 если $\eta > 0$, и "меньше" – в противном случае. Понятно, что уровень достоверности получаемого при этом вывода зависит от того, на каких уровнях выбраны сечения $\alpha_k, k = 1,...,m$, и каково их число. Более точным является результат сравнения нечетких чисел, получаемый путем построения теоретико-вероятностных аналогов функций принадлежности нечетких чисел [7]. Для функции принадлежности нечеткого числа $M(x)$ введем функцию

$$\phi(x) = M(x) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} M(x)dx. \qquad (4)$$

Понятно, что определенная таким образом неотрицательная функция $\phi(x)$ обладает всеми свойствами плотности распределения случайно величины. Теперь для функций принадлежности $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ введем, используя (4), функции

$$\phi_1(x_1) = \frac{M_1(x_1)}{\int_{-\infty}^{\infty} M_1(x_1)dx}, \quad \phi_2(x_2) = \frac{M_2(x_2)}{\int_{-\infty}^{\infty} M_2(x_2)dx}.$$

Тогда "вероятность" того, что нечеткое число x_2 будет больше нечеткого числа x_1 задается так:

$$P(x_2 > x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(x_2)dx_2 \right) \phi_1(x_1)dx_1. \qquad (5)$$

Запишем (4) для случая, когда $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ определены формулами (2). При этом

$$\phi_1(x_1) = M_1(x_1) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} M_1(x_1)dx = \frac{2M_1(x_1)}{b_1 - a_1},$$

$$\phi_2(x_2) = \frac{2M_2(x_2)}{b_2 - a_2}.$$

Далее

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(x_2)dx_2 =$$

$$= \begin{cases} 1, & x_2 < a_2 \\ \int_{x_1}^{c_2} \phi_2(x_2)dx_2 + \int_{c_2}^{b_2} \phi_2(x_2)dx_2, & a_2 \le x_1 < c_2, \\ \int_{x_1}^{b_2} \phi_2(x_2)dx_2, & c_2 \le x_1 < b_2, \\ 0, & x_1 > b_2. \end{cases} \qquad (6)$$

Подставляя (2) в (6), после несложных вычислений, получим

$$J_1(x_1) = \int_{x_1}^{c_2} \phi_2(x_2)dx_2 + \int_{c_2}^{b_2} \phi_2(x_2)dx_2 =$$

$$= \frac{-x_1^2 - a_2c_2 + 2a_2x_1 + b_2c_2 - b_2a_2}{(b_2 - c_2)(c_2 - a_2)}, \qquad (7)$$

$$J_2(x_1) = \int_{x_1}^{b_2} \phi_2(x_2)dx_2 = \frac{(b_2 - x_1)^2}{(b_2 - a_2)(b_2 - c_2)}. \qquad (8)$$

Теперь, с учетом (5)–(8), имеем

$$P(x_2 > x_1) = \int_{a_1}^{a_2} \phi_1(x_1)dx_1 + \int_{a_2}^{c_2} J_1(x_1)\phi_1(x_1)dx_1 +$$

$$+ \int_{c_2}^{b_2} J_2(x_1)\phi_1(x_1)dx_1 = M_0 + M_1 + M_2. \qquad (9)$$

Далее

$$M_0 = \int_{a_1}^{c_1} \frac{2}{b_1 - a_1} \frac{x_1 - a_1}{c_1 - a_1} dx_1 + \int_{c_1}^{a_2} \frac{2}{b_1 - a_1} \frac{b_1 - x_1}{b_1 - c_1} dx_1 =$$

$$= \frac{-c_1b_1 - a_1b_1 + a_1c_1 + 2b_1a_2 - a_2^2}{(b_1 - a_1)(b_1 - c_1)}, \qquad (10)$$

$$M_1 = \frac{1}{(b_1 - c_1)(b_2 - c_2)(c_2 - a_2)(b_1 - a_1)} \cdot$$

$$\cdot \int_{a_2}^{c_2} (-x_1^2 - a_2c_2 + 2a_2x_1 + b_2c_2 - b_2a_2)(b_1 - x_1)dx_1 =$$

$$= \frac{1}{(b_1 - c_1)(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{4}(c_2^2 + a_2^2)(c_2 + a_2) - \frac{d_{11}}{3}(c_2^2 + c_2a_2 + a_2^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{d_{12}}{2}(c_2 + a_2) + d_{13} \right], \quad d_{11} = (b_1 + 2a_2),$$

$$d_{12} = 2b_1a_2 + a_2c_2 - b_2c_2 + a_2b_2,$$

$$d_{13} = b_1b_2c_2 - b_1a_2c_2 - b_1b_2a_2. \qquad (11)$$

$$M_2 = \frac{1}{(b_1 - c_1)(b_2 - a_2)(b_2 - c_2)(b_1 - a_1)} \cdot$$

$$\cdot \int_{c_2}^{b_2} (b_2 - x_1)^2 (b_1 - x_1)dx_1 =$$

$$= \frac{1}{(b_1 - c_1)(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)} \left[-\frac{1}{4}(b_2^2 + c_2^2)(b_2 + c_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{d_{21}}{3}(b_2^2 + b_2c_2 + c_2^2) - \frac{d_{22}}{2}(b_2 + c_2) + b_2^2b_1 \right],$$

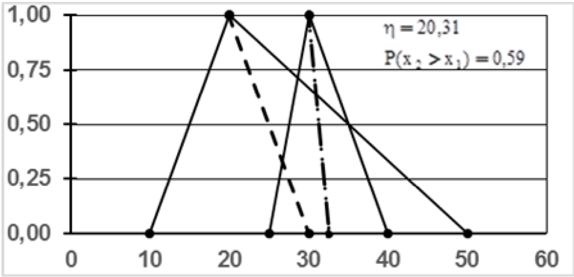
$$d_{21} = b_1 + 2b_2, \; d_{22} = b_2^2 + 2b_1b_2. \qquad (12)$$

Рассмотрим примеры использования полученных соотношений (3) и (4) для сравнения нечетких чисел. Зададим в (2) следующие значения параметров функций принадлежности:

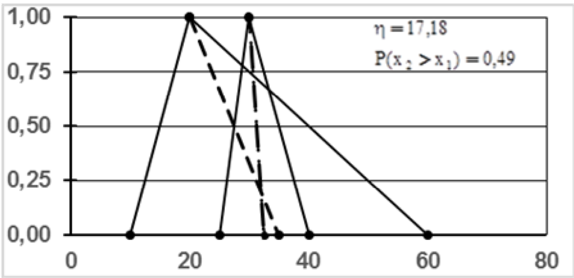
$$a_1 = 10, \quad c_1 = 20, \quad b_1 = 50, 60, 80, 120,$$

$$a_2 = 25, \quad c_2 = 30, \quad b_2 = 40.$$

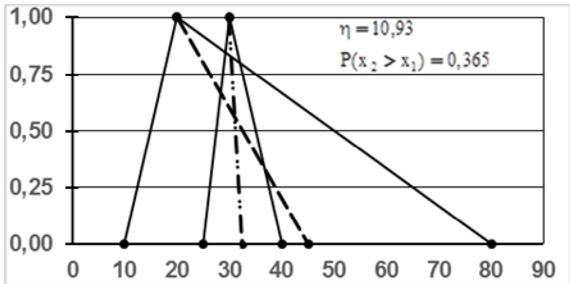
Соответствующие графики и результаты приведены на рис. 1.



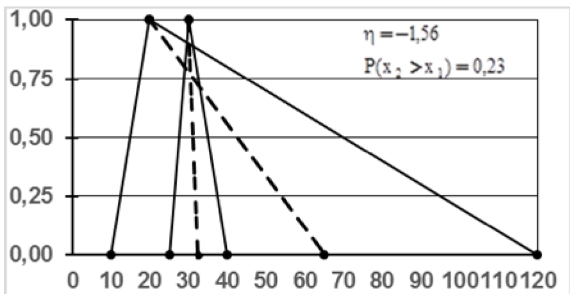
а – $a_1 = 10, c_1 = 20, b_1 = 50, \; a_2 = 25, c_2 = 30, b_2 = 40.$



б – $a_1 = 10, c_1 = 20, b_1 = 60, \; a_2 = 25, c_2 = 30, b_2 = 40.$



в – $a_1 = 10, c_1 = 20, b_1 = 80, \; a_2 = 25, c_2 = 30, b_2 = 40.$



г – $a_1 = 10, c_1 = 20, b_1 = 120, \; a_2 = 25, c_2 = 30, b_2 = 40.$

Рис. 1. Результаты сравнения нечетких чисел

Выводы

Рассмотрена задача коммивояжера высокой размерности в условиях нечетких исходных данных.

Стержневой элемент технологии решения задачи – декомпозиция, реализуемая путем кластеризации множества пунктов обхода.

Предложены два альтернативных метода сравнения нечетких расстояний между пунктами, используемые при решении задачи кластеризации.

Приведен пример реализации этих методов.

Список литературы

1. Flood M.M. The Traveling Salesman Problem / M.M. Flood // Operations Research, 1958. – N 6. – P.791–814.

2. Groes G. Method for Solving of Traveling Salesman Problem / G. Groes // Operations Research, 1958. – N6. – P. 791–814.

3. Раскин Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления. / Л.Г. Раскин. – М.: Сов. радио, 1976. – 344 с.

4. Goldberg D. Genetic Algorithms / D. Goldberg. – MA: Addison Wesley, 1989. – 210 p.

5. Holland D. Adaptation in Natural and Artificial Systems / D. Holland. – N.Y.: MIT Press, 1992. – 340 p.

6. Лысенко Ю.Г. Нейронные сети и генетические алгоритмы / Ю.Г. Лысенко, Н.Н. Иванов, А.Ю. Минц. – Донецк: Юго-Восток, 2003. – 230 с.

7. Серая О.В. Многомерные модели логистики в условиях неопределённости. / О.В. Серая. – Х.: ФОП Стеценко, 2010. – 512 с.

8. Серая О.В. Применение процедуры кластеризации при решении задачи коммивояжера высокой размерности с использованием генетического алгоритма / О.В. Серая // Вестник НТУ "ХПИ", 2006. – № 23 – С. 164–169.

9. Раскин Л.Г. Математические методы исследования операций и анализа сложных систем / Л.Г. Раскин. – Х.: ВИРТА ПВО, 1988. – 178 с.

10. Раскин Л.Г. Нечеткая математика / Л.Г. Раскин, О.В. Серая. – Х.: Парус, 2008. – 352 с.

Поступила в редколлегию 29.03.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.В. Серая, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

НЕЧІТКА ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦІЇ

Л.Г. Раскін, В.В. Карпенко

Розглянуто задачу маршрутизації високої розмірності в умовах нечіткого задання вхідних даних. Запропоновано декомпозиційний алгоритм вирішення задачі, який використовує кластеризацію вхідної множини пунктів. Основою алгоритму є технологія порівняння нечітких чисел з метою вибору мінімального з них, що забезпечує можливість кластеризації. Виконаний аналіз двох альтернативних методів порівняння. Наведено приклад.

Ключові слова: *маршрутизація, задача комівояжера високої розмірності, декомпозиція, нечіткі вхідні дані.*

FUZZY ROUTING PROBLEM

L.G. Raskin, V.V. Karpenko

The high-dimensional routing problem is considered under conditions where the initial data are not clearly defined. A decomposition algorithm for solving a problem using clustering of the initial set of points is proposed. The basis of the algorithm is the technology of comparing fuzzy numbers in order to select the minimum of them, which provides the possibility of clustering. Two alternative comparison methods are compared. An example is given.

Keywords: *routing, the task of a traveling salesman of high dimension, decomposition, fuzzy initial data.*