Математичні моделі та методи

УДК 510.635

Н.В. Голян

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ИЗОМОРФИЗМ И ИНТЕРПРЕТАЦИИ АЛГЕБР ПОНЯТИЙ

В работе сформулирована и доказана теорема о том, что алгебры понятий одинаковой размерности изоморфны друг другу. Вместе с теоремой о существовании алгебр понятий теорема об изоморфизме позволяет утверждать, что алгебра понятий каждой размерности существует и единственна с точностью до изоморфизма.

Ключевые слова: *алгебра конечных предикатов, алгебра понятий, каноническая алгебра, изоморфизм, интерпретации алгебры.*

Введение

Работа является логическим продолжением статей [1, 2]. В статье [1] аксиоматически построена алгебра понятий - алгебраическая система, элементы множества-носителя которой интерпретируются как понятия интеллекта, а ее операции над этими элементами – как действия интеллекта над понятиями. Доказана теорема о существовании алгебры понятий любой размерности. В статье [2] проанализированы множества элементов канонической алгебры понятий. Показано, что алгебра большей размерности является расширением алгебры меньшей размерности. Иначе говоря, алгебра меньшей размерности является подалгеброй алгебры большей размерности. Введены правила построения формул алгебр понятий и показано, что язык формул алгебры понятий любой размерности полон. Доказана теорема о существовании и единственности стандартной формы алгебры понятий.

В статье сформулирована и доказана теорема о том, что алгебры понятий одинаковой размерности изоморфны друг другу. Вместе с теоремой о существовании алгебр понятий можно утверждать, что алгебра понятий каждой размерности существует и единственна с точностью до изоморфизма.

Рассмотрены некоторые возможные интерпретации алгебры понятий - алгебры множеств, двоичных наборов, одноместных и многоместных предикатов первого порядка, булевых функций.

1. Изоморфизм алгебр понятий

Ниже формулируется и доказывается теорема об изоморфизме алгебр понятий.

Теорема. Все алгебры понятий размерности n $(n \in \{1, 2, ...\})$ изоморфны друг другу.

Доказательство. В [2] было доказано, что каждой стандартной форме и ее ядру соответствует свое понятие алгебры L_n. Следовательно, каждому понятию $x \in L_n$ соответствует свое подмножество E_x базиса B_n. Множество E_x будем называть ядром понятия x. Обозначим через C_n систему всех подмножеств базиса B_n. Существует биекция

$$\Omega : S_n \to C_n,$$

которая ставит в соответствие каждому понятию $x \in L_n$ его ядро $E_x \in C_x$, так что $E_x = \Omega(x)$.

Докажем, что любая алгебра понятий L_n размерности n изоморфна канонической алгебре понятий $\mathbf{L}_n$ той же размерности. Все символы, относящиеся к алгебре L_n, будем записывать тонким шрифтом, а символы относящиеся к алгебре $\mathbf{L}_n$ – жирным. Введем биекцию

$$\Phi : S_n \to \mathbf{S}_n,$$

определив ее следующим образом:

$$\Phi(0) = \mathbf{0},$$

$$\Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}) = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}...\mathbf{e}_{i_p}.$$

Имеем:

$$\Phi(0 \vee 0) = \Phi(0) = \mathbf{0} = \mathbf{0} \vee \mathbf{0} = \Phi(0) \vee \Phi(0),$$

$$\Phi(0 \vee (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p})) = \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}) = \\ = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}...\mathbf{e}_{i_p} = 0 \vee \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}...\mathbf{e}_{i_p} = \\ = \Phi(0) \vee \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}),$$

$$\Phi((e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}) \vee 0) = \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}) = \\ = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}...\mathbf{e}_{i_p} = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}...\mathbf{e}_{i_p} \vee \mathbf{0} = \\ = \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}) \vee \Phi(0).$$

В алгебре L_n логическая сумма

$$z = e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee ... \vee e_{k_r}$$

любых ненулевых понятий

$$x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p} \text{ и } y = e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \ldots \vee e_{j_q}$$

может быть определена, согласно аксиомам идемпотентности, коммутативности и ассоциативности, следующим правилом:

$$\{e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee \ldots \vee e_{k_r}\} = \{e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}\} \cup$$
$$\cup \{e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \ldots \vee e_{j_q}\}.$$

Для получения логической суммы y по этому правилу нужно выбрать из стандартных форм обоих слагаемых

$$x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p} \text{ и } y = e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \ldots \vee e_{j_q}$$

все входящие в них базисные символы

$$e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p},\ e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \ldots \vee e_{j_q}$$

и составить из них стандартную форму

$$z = e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee \ldots \vee e_{k_r},$$

не допуская повторений базисных символов и располагая последние в порядке возрастания их номеров. Как мы знаем, аналогичное правило используется и для образования логической суммы в алгебре L_n .мВ силу сказанного имеем:

$$\Phi((e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}) \vee (e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \ldots \vee e_{j_q})) =$$
$$= \Phi(e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee \ldots \vee e_{k_r}) = \mathbf{e}_{i_p}\mathbf{e}_{k_1}\ldots\mathbf{e}_{k_p}\mathbf{e}_{k_1}\mathbf{e}_{k_2}\ldots\mathbf{e}_{k_r} =$$
$$= \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_p} \vee \mathbf{e}_{j_1}\mathbf{e}_{j_2}\ldots\mathbf{e}_{j_q} = \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}) \vee$$
$$\vee \Phi(e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \ldots \vee e_{j_q}).$$

Итак, при любых $x, y \in S_n$ имеем:

$$\Phi(x \vee y) = \Phi(x) \vee \Phi(y).$$

Это означает, что любая алгебра понятий L_n изоморфна [3] канонической алгебре понятий $\mathbf{L}_n$. Отсюда непосредственно следует, что все алгебры понятий размерности n изоморфны друг другу. Теорема доказана.

Смысл теоремы сводится к тому, что ранее введенному понятию алгебры понятий размерности n удовлетворяет единственный абстрактный математический объект. Это означает, что все возможности алгебры понятий размерности n отличаются друг от друга лишь используемыми в них обозначениями. По существу же, т.е. в абстрактном смысле, все такие алгебры неразличимы.

Объединяя теоремы о существовании и изоморфизме алгебр понятий, мы можем утверждать что алгебра понятий каждой размерности $n\ (n \in \{1, 2, \ldots\})$ существует и единственна (с точностью до изоморфизма).

2. Интерпретации алгебры понятий

Рассмотрим некоторые из возможных интерпретаций алгебры понятий размерности n.

А. Алгебра множеств. В качестве носителя S_n алгебры понятий L_n при теоретико-множественной интерпретации берем систему T_n всех подмножеств множества

$$R_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

каких-нибудь символов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. В роли элементов множества S_n выступают подмножества системы T_n. В роли нулевого понятия алгебры L_n берем пустое множество $\varnothing$. В роли базисных понятий

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

в алгебре множеств берем одноэлементные множества

$$\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}.$$

Под элементом

$$e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}$$

в алгебре множеств понимается множество

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p}\}.$$

Роль операции дизъюнкции в алгебре множеств выполняет операция объединения множеств. Легко проверить, что все аксиомы алгебры понятий L_n в алгебре множеств выполняются.

Б. Алгебра двоичных наборов. В роли понятий алгебры при двоично-кодовой интерпретации берем n-компонентные наборы

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

двоичных цифр $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. В роли носителя S_n алгебры L_n в алгебре двоичных кодов принимаем n-ную декартову степень множества $\{0,\ 1\}$. Нулевым понятием алгебры L_n при такой интерпретации служит набор $(0, 0, \ldots, 0)$, составленный из одних нулей. В роли базисных понятий используются всевозможные двоичные наборы, в состав которых входит по одной единице $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $(0, 0, 0, \ldots, 1)$. Под элементом

$$e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}$$

в алгебре двоичных наборов понимается набор, у которого на $i_1, i_2, \ldots, i_p$-том местах стоят единицы, а на остальных местах – нули. Дизъюнкция понятий при двоично-кодовой интерпретации определяется как дизъюнкция двоичных наборов:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \vee (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) =$$
$$= (\alpha_1 \vee \beta_1 \vee, \alpha_2 \vee \beta_2, \ldots, \alpha_n \vee \beta_n).$$

Нетрудно убедиться, что все аксиомы алгебры понятий L_n в алгебре n-компонентных двоичных наборов выполняются.

Между алгеброй множеств и алгеброй двоичных наборов существует взаимно однозначная связь. Пусть A – произвольно выбранный элемент алгебры множеств, а $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – соответствующий ему элемент алгебры двоичных наборов. Тогда: если $a_i \in A$, то $\alpha_i = 1$; если $a_i \notin A$, то $\alpha_i = 0$; если

$\alpha_i = 1$, то $a_i \in A$; если $\alpha_i = 0$, то $a_i \notin A$ $(i \in \{1, 2, ..., n\})$. Например, элементу (a_2, a_3, a_5) шестимерной алгебры множеств соответствует элемент $(0,1,1,0,1,0)$ шестимерной алгебры двоичных наборов. Элементу $(1,0,0,0,1,1)$ алгебры двоичных наборов соответствует элемент (a_1, a_5, a_6) алгебры множеств.

В. Алгебра одноместных предикатов первого порядка [4]. Понятиями в n-мерной алгебре одноместных предикатов первого порядка служат всевозможные предикаты $P(x)$, заданные на множестве

$$R_n = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

букв $a_1, a_2, ..., a_n$. Нулевым понятием здесь служит тождественно ложный предикат. В роли базисных понятий используются предикаты узнавания букв

$$x^{a_1}, x^{a_2}, ..., x^{a_n},$$

обращающиеся в 1 соответственно при

$$x = a_1, x = a_2, ..., x = a_n$$

и в 0 – при остальных значениях переменной x. Понятием

$$e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}$$

в алгебре одноместных предикатов первого порядка служит предикат $P(x)$, обращающийся в 1 при

$$x \in \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p}\}$$

и в 0 – при всех других значениях переменной x. Роль дизъюнкции понятий выполняет операция предикатов. Аксиомы 1) - 5) в алгебре одноместных предикатов первого порядка выполняются. Всего имеется 2^n одноместных предикатов первого порядка.

Между алгеброй множеств и алгеброй двоичных наборов, с одной стороны, и алгеброй одноместных предикатов первого порядка, с другой, имеют место следующие связи. Пусть

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p}\} \text{ –}$$

произвольно выбранный элемент алгебры множеств. Ему взаимно однозначно соответствует элемент

$$x^{a_{i_1}}, x^{a_{i_2}}, ..., x^{a_{i_p}}$$

алгебры одноместных предикатов первого порядка. Нулевому элементу $\varnothing$ алгебры множеств соответствует тождественно ложный предикат 0. Элементу

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

алгебры двоичных наборов взаимно однозначно соответствует элемент

$$\alpha_1 \cdot x^{a_1}, \alpha_2 \cdot x^{a_2}, ..., \alpha_n \cdot x^{a_n}$$

алгебры одноместных предикатов.

Г. Алгебра многоместных предикатов первого порядка. Рассмотрим множество N всевозможных предикатов вида

$$P(x_1, x_2, ..., x_m),$$

заданных на декартовом произведении

$$M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_m$$

множеств

$$M_i = \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_i}\},$$

где $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

Множество N принимаем в роли носителя алгебры понятий L_n. Всего в области M имеется

$$n = n_1 n_2 ... n_m$$

наборов, в множестве N содержится всего

$$2^{n_1 n_2 ... n_m}$$

предикатов. Размерностью алгебры многоместных предикатов первого порядка служит число n. Дизъюнкцией понятий в алгебре многоместных предикатов первого порядка служит операция дизъюнкции предикатов. Нулевым понятием служит предикат 0, тождественно равный нулю. В алгебре многоместных предикатов первого порядка имеется n базисных понятий. В их роли выступают всевозможные предикаты

$$P_j \ (j = 1, 2, ..., n),$$

обращающиеся в единицу на единственном наборе значений аргументов $(s_1, s_2, ..., s_m)$:

$$P_j(x_1, x_2, ..., x_m) = \\ = \begin{cases} 1, \text{ если } (x_1, x_2, ..., x_m) = (s_1, s_2, ..., s_m), \\ 0, \text{ если } (x_1, x_2, ..., x_m) \neq (s_1, s_2, ..., s_m). \end{cases} \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что все аксиомы алгебры понятий размерности n в алгебре многоместных предикатов первого порядка выполняются.

В теоретико-множественной интерпретации алгебре многоместных предикатов первого порядка соответствует алгебра всех подмножеств декартова произведения

$$M_1 \times M_2 \times ... \times M_m.$$

Если P и $(s_1, s_2, ..., s_m)$ – соответствующие друг другу элементы алгебры многоместных предикатов первого порядка и алгебры подмножеств декартова произведения $M_1 \times M_2 \times ... \times M_m$, то взаимно однозначная связь между ними определяется правилом:

$$P(x_1, x_2, ..., x_m) = 1$$

в том и только в том случае, когда

$$(s_1, s_2, ..., s_m) \in M_1 \times M_2 \times ... \times M_m.$$

В двоично-кодовой интерпретации алгебре многоместных предикатов первого порядка соответствует алгебра двоичных кодов длины

$$n = n_1, n_2, ..., n_m.$$

Связь между многоместным предикатом первого порядка и соответствующим ему двоичным кодом длины n может быть установлена таким образом.

Двоичному коду

$$x_1, x_2, ..., x_m$$

взаимно однозначно соответствует предикат

$$P(x_1, x_2, ..., x_m) = \vee_{a_1, a_2, ..., a_m} \alpha_i x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}, \quad (2)$$

где i – номер набора [5] $(s_1, s_2, ..., s_m)$.

д) Алгебра предикатов произвольного порядка [3]. В ней роль идей алгебры L_n выполняют всевозможные предикаты p-го порядка вида

$$f\ (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0m_2}, x_{11}, x_{12}, ..., x_{1m_1}, ...,$$
$$x_{p-1,1}, x_{p-1,2}, ..., x_{p-1m_{p-1}}),$$

заданные на декартовом произведении

$$M = M_0^{m_0} \times M_1^{m_1} \times ... \times M_{p-1}^{m_{p-1}}. \quad (3)$$

Множество M_i $(i = 1, 2, ..., p-1)$ образовано из предикатов i-порядка. Алгебра предикатов p-го порядка имеет размерность

$$n = n_0^{m_0} n_1^{m_1} ... n_{p-1}^{m_{p-1}}. \quad (4)$$

Числа $n_1, n_2, ..., n_{p-1}$ определяются по следующей рекуррентной формуле

$$n_i = 2^{n_0^{m_0} n_1^{m_1} ... n_{p-1}^{m_{p-1}}}. \quad (5)$$

где n_0 – число элементов в множестве M_0. В остальном алгебра предикатов произвольного порядка рассматривается аналогично алгебре многоместных предикатов первого порядка.

е) Алгебра булевых функций [4]. К алгебре булевых функций приходим, принимая в алгебре понятий L_n в роли S_n множество всех m-местных булевых функций. Размерностью алгебры понятий в этом случае служит число $n = 2^m$. Всего в множестве S_n содержится $n = 2^{2^m}$ векторов. Нулевым понятием служит m-местная булева функция, тождественно равная нулю. В роли базисных понятий выступают всевозможные булевы функции, обращающиеся в единицу лишь на одном наборе значений аргументов. Всего в алгебре m-местных булевых функций имеется 2^m различных базисных понятий. В роли операции дизъюнкции понятий в данном случае выступает операция дизъюнкции m-местных булевых функций. При $m = 1$ приходим к алгебре логики. В этом случае в роли операции дизъюнкции понятий выступает дизъюнкция двоичных знаков: $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$. Нулевым понятием служит знак 0, единственным базисным понятием– знак 1.

Выводы

В работе сформулирована и доказана теорема о том, что алгебры понятий одинаковой размерности изоморфны друг другу. Вместе с теоремой о существовании алгебр понятий теорема об изоморфизме позволяет утверждать, что алгебра понятий каждой размерности существует и единственна с точностью до изоморфизма.

Рассмотрены некоторые возможные интерпретации алгебры понятий - алгебры множеств, двоичных наборов, одноместных и многоместных предикатов первого порядка, булевых функций.

Список литературы

1. Голян Н.В. Алгебра понятий как формальный аппарат моделирования действий интеллекта над понятиями / Н.В. Голян, В.В. Голян, Л.Д. Самофалов // Системи управління, навігації та зв'язку. – П.: ПНТУ, 2016. – Вип. 3(39). – С. 38-41.

2. Голян Н.В. О свойствах канонической алгебры понятий / Н.В. Голян // Системи управління, навігації та зв'язку. – П.: ПНТУ, 2016. – Вип. 4(40). – С. 44-47.

3. Гильберт Д. Основания геометрии / Д. Гильберт. – М.; Л.: Гостехиздат. 1948. – 364 с.

4. Бондаренко М.Ф. Теория интеллекта. Учебник / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Харьков: СМИТ, 2007 – 576 с.

5. Гильберт Д., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики / Д. Гильберт, П. Бернайс . – М.: Наука, 1979. – 557 с.

Надійшла до редколегії 26.12.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.В. Шостак, Національний аерокосмічний університет імені М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків.

ІЗОМОРФІЗМ І ІНТЕРПРЕТАЦІЇ АЛГЕБРИ ПОНЯТЬ

Н.В. Голян

У роботі сформульована і доведена теорема про те, що алгебра понять однакової розмірності ізоморфні між собою. Разом з теоремою про існування алгебри понять теорема про ізоморфізм дозволяє стверджувати, що алгебра понять кожної розмірності існує і єдина з точністю до ізоморфізму.

Ключові слова: *алгебра скінченних предикатів, алгебра понять, канонічна алгебра, изоморфизм, интерпретации алгебры.*

THE CONCEPTS ALGEBRAS ISOMORPHISM AND INTERPRETATIONS

N.V. Golian

In the article is set forth and well-proven a theorem that identical dimension concepts algebras are isomorphic each other. Together with a theorem about concepts algebras existence a theorem about an isomorphism allows to assert that every dimension concepts algebra exists and only within an isomorphism.

Keywords: *finite predicates algebra, algebra of concepts, canonical algebra, isomorphism, algebra interpretations.*