УДК 62.7:519.2

О.Ю. Кропачек

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ РИСКОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ДИСКРИМИНАНТНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ДИАГНОСТИКЕ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрена вероятностная модель квадратичного дискриминирующего преобразования входных случайных векторных измерительных сигналов в информационной системе технической диагностики, когда коэффициенты функции преобразования случайны. Показано, что такая модель – это суперпозиция условных (по классам диагностируемых состояний) центрального и нецентрального распределений Фишера, число степеней которых зависит как от объемов обучающих выборок компонент входного вектора, так и по классам состояний. Предложен метод оценивания достоверности диагностики, как функции не только размерности входного вектора измеряемых информативных признаков, но и дискриминантной функции.

Ключевые слова: *диагностика, контроль, достоверность, вероятность, кумулянт, дискриминантная функция, статистический риск.*

Введение

Постановка проблемы. Повышение эффективности работы любых информационных систем контроля, диагностики, идентификации невозможно без учета априорной информации, связанной с исходной неопределенностью состояний контролируемых или диагностируемых объектов. Кроме того, уменьшение такой неопределенности связано с повышением точности измерительных преобразований и уменьшения остаточной неопределенности решений, принимаемых в ходе контроля или функциональной диагностики.

Известные вероятностные подходы в теории информации и информационной теории измерений позволяют рассчитывать и анализировать количество ожидаемой информации для моделей измерительных преобразований и задач кодирования случайных измерительных сигналов. Теория же оценивания достоверности полученного количества информации в задачах контроля и диагностики практически не разработана. Это ограничивает возможности теоретического анализа и совершенствования информационных моделей оптимального синтеза информационно-измерительных систем контроля и диагностики объектов со случайными свойствами.

Анализ литературы. Проблема снижения рисков диагностических решений в условиях неустранимой априорной неопределенности свойств объектов технической диагностики всегда являлась предметом вероятностно-статистического анализа процедур преобразования первичной измерительной информации во вторичные логические решения. При этом, степень и глубина изучения проблемы связывалась со сложностью математической модели процедуры такого дискриминантного преобразования [1, 2]. Лучше всего изучена проблема для простых (линейных) процедур, реализованных в виде параметрических линейных дискриминантных функций (ДФ) [1, 3, 4]. Квадратичные функции, учитывающие априорную информацию большего (в разы) объема исследованы – недостаточно [5]. По крайней мере, отсутствуют статистически обоснованные модели функциональной связи между объемами обучающих выборок, используемых для синтеза коэффициентов ДФ и интервальными оценками достоверности получаемых решений.

Цель статьи. Изложение методики оценивания достоверности диагностики, когда для принятия решений используется квадратичная ДФ со случайными коэффициентами, дисперсии которых зависят от объема многомерных и многократных измерений на этапе обучения информационной системы диагностики.

Моделирование среднего риска при ограниченных выборках

Кумулянтный анализ квадратичной дискриминантной функции

$$\delta^{(K)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^{(K)}-m_i^{(1)}}{S_i^{(1)}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^{(K)}-m_i^{(0)}}{S_i^{(0)}}\right)^2+ \\ +\sum_{i=1}^{n}\ln\left(S_i^{(1)}/S_i^{(0)}\right)^2, \qquad (1)$$

где $m_i^{(0)}$, $m_i^{(1)}$ – оценки элементов векторов средних $\mu_{(0)}$, $\mu_{(1)}$, полученных по образцовым выборкам диагностического сигнала; $S_i^{(0)}$, $S_i^{(1)}$ – оценки элементов дисперсионных матриц $D_{(0)}$, $D_{(1)}$, полученных по выборкам диагностического сигнала;

$x_i^{(K)}$ – реализация i -го значения контрольной выборки $\left\{x_1^{(K)}, ..., x_n^{(K)}\right\}$ с заданным номером состояния:

$$K = \begin{cases} 0, \text{ если } \pi \in \pi_0; \\ 1, \text{ если } \pi \in \pi_1, \end{cases}$$

с последующим восстановлением ее плотности распределения, позволяет достаточно точно рассчитать все возможные риски диагностических решений. Такой расчет позволяет учесть:

а) размерность n входного вектора $\overline{X}$ измерительных сигналов;

б) объем N обучающей выборки, используемой для оценивания всех постоянных коэффициентов ДФ;

в) минимальный средний риск $\overline{R}_0$, соответствующий условию $N \to \infty$, когда случайные оценки коэффициентов функции (1) становятся априорно детерминированными параметрами.

Формально, функциональную зависимость среднего риска от n, N и $\overline{R}_0$ можно представить функционалом:

$$\overline{R} = \overline{R}_0 + A\left(n, \overline{R}_0\right) N^{-B\left(n, R_0\right)}, \qquad (2)$$

учитывающим условие

$$\lim_{N\to\infty} \overline{R} = \overline{R}_0 . \qquad (3)$$

Коэффициенты $A\left(n, \overline{R}_0\right)$ и $B\left(n, R_0\right)$ являются функциями независимых аргументов n и $\overline{R}_0$.

Для нахождения аналитической модели функционала (2) было проведено трехмерное (по n, N и R_0) моделирование случайных оценок $m_i^{(0)}$, $m_i^{(1)}$, $S_i^{(0)}$, $S_i^{(1)}$ для условий:

1) $\mu_{(0)} = 0$;

2) $D_{(0)} = D_{(1)} = I$ (дисперсионные матрицы по состояниям π_0 и π_1 – диагональные и единичные);

3) $\mu_{(1)} = \delta \cdot \tau^{-1/2}$;

4) δ – расстояние Махаланобиса, определяемое через интеграл вероятностей [6] при заданном риске $\overline{R}_0$:

$$\overline{R}_0 = \Phi\left(\delta/2\right). \qquad (4)$$

Для получения случайных оценок $m_i^{(0)}$, $m_i^{(1)}$, $S_i^{(0)}$, $S_i^{(1)}$ генерировались (на компьютере) последовательности псевдослучайных нормально распределенных чисел со средними $\mu_{(0)}$ (по состоянию π_0), $\mu_{(1)}$ (по состоянию π_1) и единичными дисперсиями (для базового варианта модели (2) с объемами обучающих выборок $N_1 = 20$, $N_2 = 100$). Генерация модельных последовательностей выборок велась в пространстве $n \in [1, 20]$ и $\overline{R}_0 \in [0.005, 0.49]$.

Для вычисления риска $\overline{R}$ рассчитывались первые 7 условных (по состояниям π_0 и π_1) кумулянтов ДФ (1), затем модельное, на базе плотности распределения плотности вероятности с последующим интегрированием этой условной плотности распределения вероятностей.

Для расчета множества (по n и $\overline{R}_0$) значений функционалов $A\left(n, R_0\right)$ и $B\left(n, R_0\right)$ использовались уравнения:

$$\begin{cases} B\left(n, R_0\right) = \ell n\left(\dfrac{\overline{R}_1 - \overline{R}_0}{\overline{R}_2 - \overline{R}_0}\right) \Big/ \ell n\left(\dfrac{N_2}{N_1}\right), \\ A\left(n, R_0\right) = \left(\overline{R}_1 - R_0\right) N_1^B. \end{cases} \qquad (5)$$

По матрице 100×100 рассчитанных значений функционалов $A\left(n, R_0\right)$ и $B\left(n, R_0\right)$ были получены их следующие полиномиальные регрессионные модели:

$$A\left(n, \overline{R}_0\right) = 0.6 + 0.1n - 1.2\overline{R}_0 - 0.2n\overline{R}_0, \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} B\left(n, \overline{R}_0\right) &= 1.533 - 0.112n + 0.012n^2 - \\ &- 0.0004378n^3 - 1.435\overline{R}_0 - 0.876\overline{R}_0^2 - \\ &- 4.145\overline{R}_0^3 - 0.067n\overline{R}_0 + 0.34n\overline{R}_0^2 - 0.004614n^2\overline{R}_0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Исследование точности модели при неравенстве рисков первого и второго рода

Модель среднего риска (2) с коэффициентами в форме полиномиальных регрессий (6) и (7) была получена в предположении равенства дисперсионных матриц $D_{(0)}$ и $D_{(1)}$, что априори предполагает равенство рисков первого и второго рода

$$\alpha = \beta. \qquad (8)$$

В реальной ситуации, условие (8) не выполнимо (или его учет заставляет использовать не квадратичную, а более простую – линейную ДФ, что приводит к потере диагностической информации).

Для проверки точности модели (2), она исследовалась для различных отношений

$$\phi = \alpha/\beta, \qquad (9)$$

при фиксированном риске $\overline{R}_0$.

Отношение (9) моделировалось использованием неравных по состояниям π_0 и π_1 дисперсионных матриц условного, по этим состояниям, вектора $\overline{X}$. Полученное при таком моделировании значения среднего риска $\overline{R}_\phi$ использовалось для вычисления относительной погрешности моделирования

$$\varepsilon = \frac{\left(\overline{R} - \overline{R}_{\phi}\right)}{\overline{R}} \cdot 100\ (\%)\ . \quad (10)$$

В табл. 1 представлены значения погрешностей ε в функции N при фиксированных величинах n и значениях $\phi = 1.5$, $\overline{R}_0 = 0.18$.

Таблица 1

Значения погрешностей моделирования ε в функции N и n (в %)

n	N				
	20	40	60	80	100
1	0.9	0.5	0.4	0.25	0.15
5	2.5	1.96	1.62	1.33	1.1
10	3.9	3.11	2.72	2.4	2.06

В табл. 2 даны величины погрешностей моделирования ε (в %) в функции отношения ϕ при $n = 1$ и трех значений обучающей выборки N.

Из табл. 1 и 2 видно, что погрешности моделирования увеличиваются с ростом отношения $\phi = \alpha/\beta$ и размерности n вектора $\overline{X}$ входных измерительных сигналов. Увеличение объема обучающих выборок N приводит к снижению погрешности ε.

Таблица 2

Значения погрешностей моделирования ε (в %) в функции отношения ϕ при $n = 1$ и различных N

N	ϕ		
	1.5	2.0	2.5
20	0.9	3.13	12.4
50	0.44	1.54	6.16
100	0.15	0.525	2.11

Исследование свойств модели среднего риска

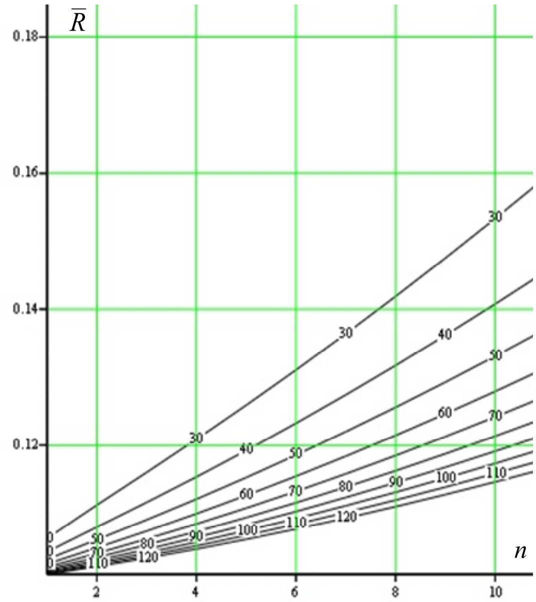
Разработанная трехмерная модель среднего риска $\overline{R}$ (2) с коэффициентами полиноминальных регрессий (6), (7), была исследована на функциональную зависимость от числа n информативных диагностических параметров при ограничениях на объемы N обучающих выборок по диагностируемым состояниям π_0 и π_1.

На рис. 1 представлены зависимости среднего риска $\overline{R}$ в функции n для разных значений N ($N = 20, 50, 100$), когда для формирования системы информативных параметров (признаков) используют ранжированный по степени убывания информативности ряд параметров.

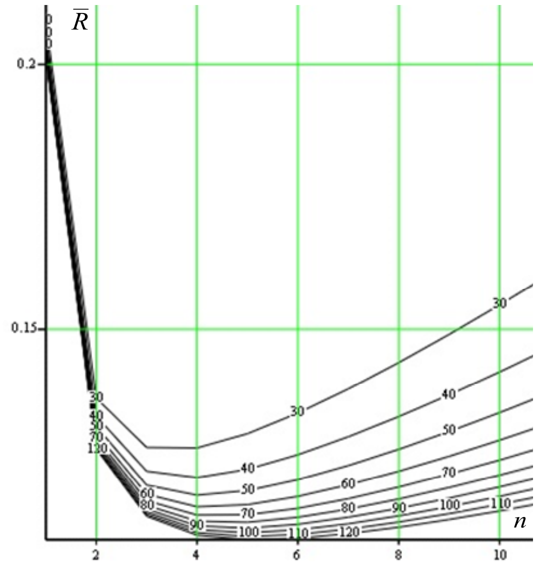
Модель такого убывания информативности задавалась в двух вариантах (при фиксированном начальном значении риска $\overline{R}_0$):

а) медленное убывание информативности

$$\overline{R} = \overline{R}_0\left(1 + n^{-1}\right); \quad (11)$$



а



б

Рис. 1. Зависимости модельного риска $\overline{R}$ от размерности n пространства информативных параметров $\overline{R}_0 = 0.1$: а – медленное, б – быстрое уменьшение информативности параметров

б) быстрое убывание информативности

$$\overline{R} = \overline{R}_0\left(1 + n^{-2}\right). \quad (12)$$

Более интересным является исследование риска $\overline{R}$ одновременно от объема выборки N и размерности n (рис. 2). Из рис. 1 и 2 видно, что выбор размерности пространства информативных параметров – это задача оптимизационная, в которой модельный средний риск $\overline{R}$ играет роль целевой функции, а оптимум соответствует ее глобальному (в пространстве $N \in [20, 100]$, $\overline{R} \in [0.005, 0.49]$, $N \in [20, 100]$) значению.

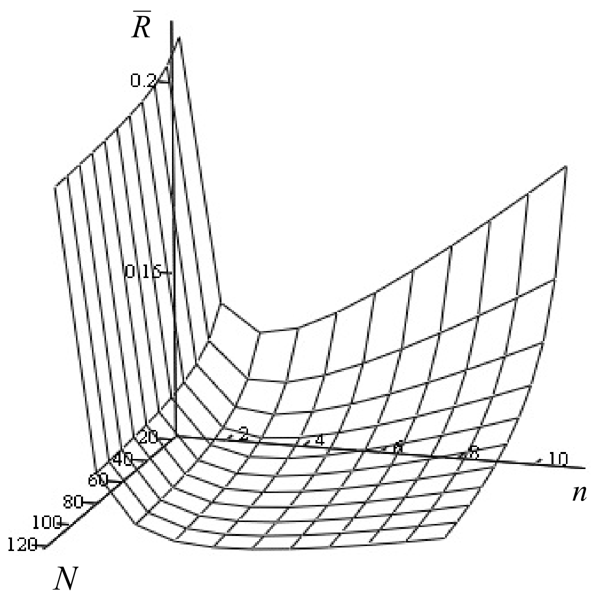


Рис. 2. Зависимости модельного риска $\bar{R}$ от объема выборки N и размерности n пространства параметров $\bar{R}_n = 0.1$

Из этих рисунков видно также, что оптимальное число информативных параметров растет с увеличением объема N обучающих выборок. При этом средний риск $\bar{R}$ падает.

Выводы

В статье получены следующие результаты:

1. Доказана, статистическим моделированием, приемлемая точность и адекватность модели при нарушениях равенства друг другу рисков первого и второго рода. Показано (табл. 1 и 2), что погрешность моделирования менее 4 %, если отношения рисков $\phi \le 2$, $n \le 30$ и $N \ge 40$.

2. Доказана возможность использования модельного риска $\bar{R}$ (уравнения (2), (6), (7)) для решения задач оптимизации пространства информативных диагностических параметров, обеспечивающей минимум $\bar{R}$ при ограничениях на объемы обучающих выборок на этапе оценивания коэффициентов квадратичной ДФ.

Список литературы

1. *Раудис Ш. Ограниченность выборки в задачах классификации / Ш. Раудис // Статистические проблемы управления. – Вильнюс. – 1976. – Вып. 18. – С. 1–185.*
2. *Мигущенко Р. П. Исследование влияния ограниченности априорной информации на вид и размер достоверности диагностики / Р. П. Мигущенко // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. – Белгород : БГТУ им. В. Г. Шухова. – 2014. – № 6. – С. 201–204.*
3. *Уткин Л. В. Модель классификации на основе неполной информации о признаках в виде их средних значений / Л. В. Уткин, Ю. А. Жук, И. А. Селиховкин // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2012. – № 3. – С. 71–81.*
4. *Щапов П. Ф. Синтез информационной модели процедуры альтернативной функціональной діагностики / П. Ф. Щапов, Р. П. Мигущенко // Приборы и методы измерений. – Минск. – 2014. – Вып. 2. – С. 94–100.*
5. *Щапов П. Ф. Повышение достоверности контроля и диагностики объектов в условиях неопределённости : монография / П. Ф. Щапов, О. Г. Аврунин. – Х. : ХНАДУ, 2011. – 191 с.*
6. *Щапов П.Ф. Теоретичні та практичні засади систем контролю та діагностування складних промислових об'єктів : Монографія / П.Ф. Щапов, Р.П. Мигущенко, О.Ю. Кропачек – Х: НТУ «ХПІ», 2015. – 260 с.*

Надійшла до редколегії 29.08.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Б. Кононов, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ РИСКОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ДОСЛІДЖЕННЯ ДІАГНОСТИЧНИХ РИЗИКІВ ПАРАМЕТРИЧНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ КВАДРАТИЧНОЇ ДИСКРИМІНАНТНОЇ ФУНКЦІЇ ПРИ ДІАГНОСТИЦІ ПРОМИСЛОВИХ ОБ'ЄКТІВ

О.Ю. Кропачек

Розглянута імовірнісна модель квадратичного дискримінуєючого перетворення вхідних випадкових векторних вимірювальних сигналів в інформаційній системі технічної діагностики, коли коефіцієнти функції перетворення випадкові. Показано, що така модель – це суперпозиція умовних (по класах діагностованих станів) центрального і нецентрального розподілів Фішера, кількість ступенів котрих залежить як від обсягів навчальних вибірок компонент вхідного вектора, так і по класах станів. Запропоновано метод оцінювання достовірності діагностики, як функції не тільки розмірності вхідного вектора вимірюваних інформативних ознак, але і дискримінантної функції.

Ключові слова: *діагностика, контроль, достовірність, ймовірність, кумулянт, дискримінантна функція, статистичний ризик.*

INVESTIGATION OF DIAGNOSTIC RISKS OF SQUARE DISCRIMINANT FUNCTION PARAMETRICALLY UNCERTAINTY WITH INDUSTRIAL OBJECTS DIAGNOSTICS

O.Yu. Kropachok

A probabilistic model of quadratic discriminating transformation of input random vector measuring signals in the information system of technical diagnostics is considered, when the coefficients of the transformation function are random. It is shown that such a model is a superposition of conditional (by classes of diagnosed states) central and no central Fisher distributions, the number of degrees of which depends both on the volumes of training samples of the input vector components and on the classes of states. A method for estimating the reliability of diagnostics as a function of not only the dimensionality of the input vector of measurable informative features but also the discriminate function is proposed.

Keywords: *diagnostics, control, reliability, probability, cumulant, discriminate function, statistical risk.*