

УДК 514.853

О.В. Шульга, Д.М. Нелюба, М.М. Гонтар

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РУХУ СФЕРИЧНОГО РОБОТА З МАЯТНИКОВИМ ПРИВОДОМ

У статті розглядається побудова математичної моделі руху сферичного робота з маятниковим приводом при прямолінійному русі по горизонтальній та похилій поверхні, при подоланні перешкод та при повороті. За допомогою отриманої моделі проведено дослідження залежності радіусу повороту робота від швидкості його руху і кута нахилу маятника для руху на низькій, середній і високій швидкостях

Ключові слова: сферичний робот, гіроскопічний ефект, радіус повороту, маятник.

Вступ

Серед різноманітних типів мобільних роботів, сферичні роботи стають все більш привабливими в останнє десятиліття, оскільки вони мають ряд переваг:

- тільки одна точка контакту із землею з мінімальним тертям при пересуванні, що дозволяє заощаджувати енергію;
- сферична структура дозволяє пересуватися навіть в значно обмежених просторах;
- сферичний екзоскелет може захистити внутрішню структуру від зовнішніх впливів (пилу, рідини або навіть газів);
- немає жодної небезпеки, що робот впаде, перевернеться та втратить мобільність, що є значною небезпекою для інших типів роботів, таких як, наприклад, людиноподібні.

До сьогодні, кількість проведених досліджень по реалізації сферичних роботів була не значною. Сферичні роботи зазвичай можуть генерувати лише незначний крутний момент для власного обертання. Це робить складним для цих роботів подолання перешкод і підйом в гору. Хоча більшість сферичних роботів використовують в якості рушійної сили зміщення центру мас, принципи, які використовуються для переміщення маси, відрізняються. Це може бути використання внутрішнього приводного блоку, маятника або оболонки робота, що деформується.

В статті розглядається рух сферичного робота з маятниковим приводом, що працює на гладких плоских поверхнях. Деякі попередні дослідження також оговорюють пересування по плоских поверхнях.

Кошіяма [1] проаналізував динаміку сферичних роботів і розробив прототип робота. По-перше, він розділив для простоти рух переміщення і рух керування, після чого для отримання рівнянь руху використав рівняння Лагранжа. Він також провів експеримент руху з використанням прототипу робота. Лапланте [2] запропонував математичний опис і результати моделювання, що визначають взаємозв'язок між крутизною рульового управління і вели-

чиною переміщення внутрішньої маси сферичного робота. Як і очікувалося, повільніші швидкості і великі кути повороту призводять до різкого рульового управління роботом. Шпітцмюлер [3] розробив прототип і винайшов для нього простий спосіб розмікненого управління. Між тим, попередні дослідження мають деякі проблеми – аналіз динаміки ігнорує можливий гіроскопічний ефект сферичного тіла, що котиться. Хоча цим ефектом можна знехтувати при невеликій швидкості, він стає важливим при зростанні швидкості.

Основна частина

Для отримання математичної моделі динаміки руху сферичного робота з маятниковим приводом розіберемо рух робота на дві складові – прямолінійний рух і поворот, які досліджувалися окремо.

Динаміка прямолінійного руху. Для виведення рівнянь руху використаємо рівняння Лагранжа.

Горизонтальний рух. Потенційні, кінетичні і обертальні енергії як для кулі, так і для маятника робота задаються таким чином (рис. 1):

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = 0; \\ U_2 = -M_2 g e \cos(\theta_1 + \theta_2); \\ K_1 = M_1 (r\omega_1)^2 / 2; \\ K_2 = M_2 \left[(r\omega_1 - e \cos(\theta_1 + \theta_2)(\omega_1 + \omega_2))^2 + \right. \\ \quad \left. + (e \sin(\theta_1 + \theta_2)(\omega_1 + \omega_2))^2 \right] / 2; \\ T_1 = J_1 \omega_1^2 / 2; \\ T_2 = J_2 (\omega_1 + \omega_2)^2 / 2, \end{array} \right. \quad (1)$$

де U_1 – потенційна енергія кулі по відношенню до висоти її ЦМ; U_2 – потенційна енергія маятника по відношенню до висоти ЦМ кулі; K_1 – кінетична енергія кулі; K_2 – кінетична енергія маятника; T_1 – обертальна енергія кулі; T_2 – обертальна енергія маятника; r – радіус кулі; e – відстань між ЦМ кулі і маятника; θ_1 – кут повороту кулі; θ_2 – кут повороту маятника відносно кулі; ω_1 – кутова швидкість кулі;

ω_2 – кутова швидкість маятника відносно кулі; J_1 – момент інерції кулі відносно її ЦМ; J_2 – момент інерції маятника відносно його ЦМ; M_1 – маса кулі; M_2 – маса маятника; g – прискорення вільного падіння.

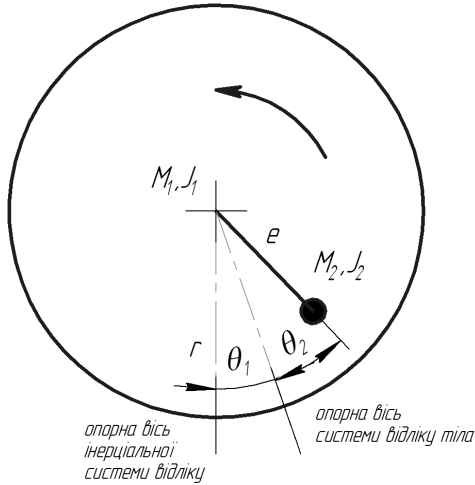


Рис. 1. Моделювання зміни напрямку руху кулі

Функція Лагранжа розраховується таким чином

$$L = K_1 + K_2 + T_1 + T_2 - U_1 - U_2, \quad (2)$$

Тепер рівняння руху Лагранжа може бути виражена таким чином:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -T + T_f, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = T, \quad (4)$$

де t – час; T – крутний момент, прикладений між кулею і маятником; T_f – крутний момент тертя між кулею і поверхнею землі. Таким чином, ми маємо:

$$-T + T_f = a_1 (J_1 + J_2 + M_1 r^2 + M_2 r^2 + M_2 e^2 - 2M_2 \times r e \cos(\theta_1 + \theta_2)) + a_2 (J_2 - M_2 r e \cos(\theta_1 + \theta_2) + M_2 e^2) + M_2 (r e \sin(\theta_1 + \theta_2) (\omega_1 + \omega_2)^2 + g e \sin(\theta_1 + \theta_2)); \quad (5)$$

$$T = a_1 (J_2 - M_2 r e \cos(\theta_1 + \theta_2) + M_2 e^2) + a_2 (J_2 + M_2 e^2) + M_2 g e \sin(\theta_1 + \theta_2). \quad (6)$$

Для простоти будемо називати кут нахилу маятника відносно вертикальної осі, а саме $\theta_2 - \theta_1$, кутом ведення.

Рух при підйомі і спусканні. Після отримання рівнянь горизонтального руху, досить просто вивести динаміку руху при підйомі і спусканні. Якщо прийняти, що єдиною відмінністю між горизонтальним рухом і рухом при підйомі або спусканні є напрямки сили тяжіння, необхідно внести невеликі зміни у значення U_1 і U_2 :

$$U_1 = -M_1 g r \theta_1 \sin \alpha, \quad (7)$$

$$U_2 = -M_2 g r \theta_1 \sin \alpha - M_2 g e \cos(\theta_1 + \theta_2 + \alpha), \quad (8)$$

де α – кут нахилу поверхні (рис. 2).

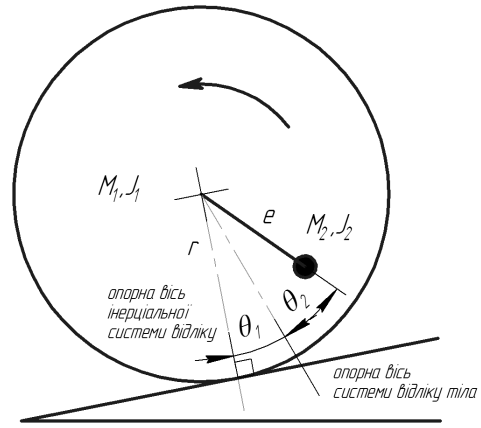


Рис. 2. Рух кулі при підйомі і спусканні

$$-T + T_f = a_1 (J_1 + J_2 + M_1 r^2 + M_2 r^2 + M_2 e^2 - 2M_2 \times r e \cos(\theta_1 + \theta_2)) + M_2 r e \sin(\theta_1 + \theta_2) (\omega_1 + \omega_2)^2 + a_2 (J_2 - M_2 r e \cos(\theta_1 + \theta_2) + M_2 e^2) + M_2 g e \sin(\theta_1 + \theta_2 + \alpha) - (M_1 + M_2) g r \sin \alpha; \quad (9)$$

$$T = a_1 (J_2 - M_2 r e \cos(\theta_1 + \theta_2) + M_2 e^2) + a_2 (J_2 + M_2 e^2) M_2 g e \sin(\theta_1 + \theta_2 + \alpha). \quad (10)$$

Подолання перешкоди. Розглянемо рух роботу при подоланні ним перешкоди (рис. 3). Будемо вважати, що прослизання відсутнє та робот не має кінетичної енергії.

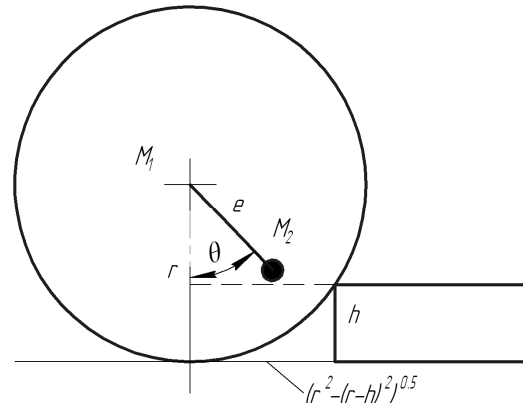


Рис. 3. Подолання перешкоди

Для того, щоб сферичний робот міг піднятися на перешкоду, його крутний момент повинен бути більшим, ніж зворотний крутний момент від сили тяжіння:

$$M_2 g e \sin \theta > (M_1 + M_2) g \sqrt{r^2 - (r-h)^2},$$

$$M_2^2 e^2 \sin^2 \theta > (M_1 + M_2)^2 (r^2 - (r-h)^2),$$

$$(r-h)^2 > r^2 - e^2 \sin^2 \theta M_2^2 / (M_1 + M_2)^2,$$

$$h < r - \sqrt{r^2 - (e \sin \theta M_2 / (M_1 + M_2))^2},$$

$$h_{\max} = r - \sqrt{r^2 - (e M_2 / (M_1 + M_2))^2}, \quad (11)$$

де h – висота перешкоди; θ – кут ведення маятника.

Внаслідок досить незначної величини кута ведення для сферичних роботів висота перешкоди, яку вони можуть подолати, є досить незначною у порівнянні з радіусом робота. Таким чином подолання перешкод є критичним недоліком руху сферичних роботів. Тому для подолання перешкод необхідне застосування спеціальних методів, таких, наприклад, як використання кінетичної енергії робота, "стрибків" при швидкому русі маятника або використання каркасного корпусу, пусті ділянки якого дозволяють долати перешкоди навіть не торкаючись до них.

Динаміка повороту. Прийmemo модель руху робота при повороті (рис. 4). Тут θ – кут крену (нахилу) кулі; γ – кут нахилу маятника відносно кулі; ω – кутова швидкість руху кулі; Ω – кутова швидкість повороту кулі; r – радіус кулі; e – відстань між ЦМ кулі і маятника; I – момент інерції кулі навколо своєї осі крену; M_1 – маса кулі; M_2 – маса маятника; g – прискорення вільного падіння.

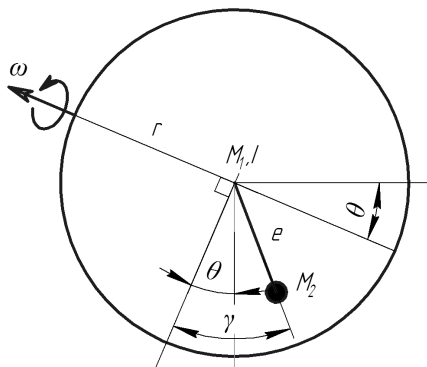


Рис. 4. Моделювання повороту

Для простоти, боковий кут нахилу маятника відносно кулі, γ , будемо називати кутом повороту, а нахил головного валу, θ , – кутом крену.

Поворот кулі на низькій швидкості. Основними припущеннями, прийнятими під час проведення цього аналізує: рівновага сил крутного моменту включає відцентрову силу повороту; робот рухається по окружності, центром якої є точка перетину поверхні і лінії вала обертання робота (рис. 5).

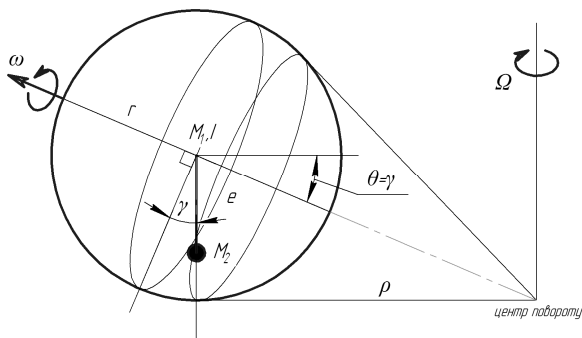


Рис. 5. Моделювання повороту з малою швидкістю

Відцентрову силою можна знехтувати в процесі розрахунку, якщо робот рухається на дуже низькій швидкості. У таких випадках, кут крену θ є

таким же, як кут повороту маятника γ . Радіус повороту ρ може бути визначений як:

$$\rho = r / \tan \gamma . \quad (12)$$

де U_1 – потенційна енергія кулі по відношенню до висоти її ЦМ; U_2 – потенційна енергія маятника по відношенню до висоти ЦМ кулі; K_1 – кінетична енергія кулі; K_2 – кінетична енергія маятника; T_1 – обертальна енергія кулі; T_2 – обертальна енергія маятника; r – радіус кулі; e – відстань між ЦМ кулі і маятника; θ_1 – кут повороту кулі; θ_2 – кут повороту маятника відносно кулі; ω_1 – кутова швидкість кулі; ω_2 – кутова швидкість маятника відносно кулі; J_1 – момент інерції кулі відносно її ЦМ; J_2 – момент інерції маятника відносно його ЦМ; M_1 – маса кулі; M_2 – маса маятника; g – прискорення вільного падіння.

Враховуючи, що довжина шляху l , пройдена при повороті, рівна

$$l = \omega r \cos \gamma = \rho \Omega , \quad (13)$$

кутова швидкість повороту Ω дорівнює:

$$\Omega = \omega r \cos \gamma / \rho = \omega r \cos \gamma \tan \gamma / r = \omega \sin \gamma . \quad (14)$$

Поворот кулі на середній швидкості. Коли робот рухається з середньою швидкістю, гіроскопічним ефектом можна знехтувати, але відцентрова сила має бути прийнята до уваги (рис. 6, 7).

Тут F_1 – відцентрова сила, прикладена до ЦМ кулі; F_2 – відцентрова сила, прикладена до ЦМ маятника; N – вертикальна сила реакції від точки контакту; f – тертя в точці контакту;

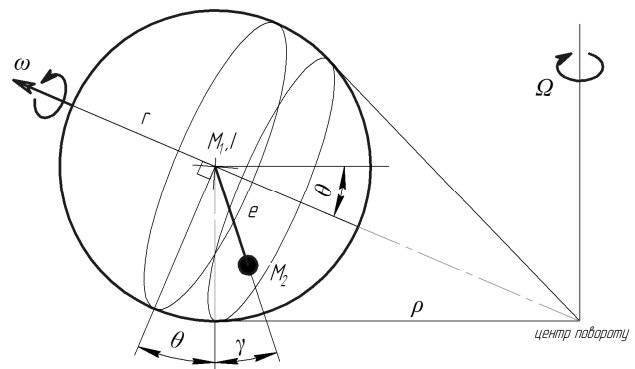


Рис. 6. Моделювання повороту на середній швидкості

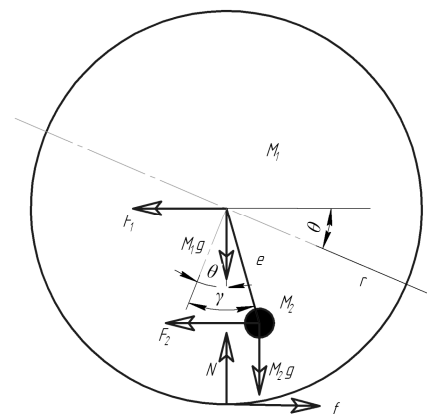


Рис. 7. Сили, прикладені до елементів робота

$$F_1 = M_1 \rho \Omega^2, \quad (15)$$

$$F_2 = M_2 (\rho - \sin(\gamma - \theta) e) \Omega^2, \quad (16)$$

$$\Omega = v / \rho. \quad (17)$$

Рівновага сили крутного моменту:

$$F_1 + F_2 = f, \quad (18)$$

$$N = (M_1 + M_2) g, \quad (19)$$

$$rf = e \sin(\gamma - \theta) M_2 g + e \cos(\gamma - \theta) F_2. \quad (20)$$

З круглої форми кулі маємо:

$$\tan \theta = r / \rho. \quad (21)$$

Для простоти можна припустити, що θ і $(\gamma - \theta)$ мають досить малі значення, що дозволяє прийняти наступні спрощення:

$$\sin(\gamma - \theta) \approx (\gamma - \theta), \quad (22)$$

$$\cos(\gamma - \theta) \approx 1, \quad (23)$$

$$\tan \theta \approx \theta. \quad (24)$$

Ігноруючи також множення малих величин, отримуємо таке рівняння:

$$\rho = \left((M_1 + M_2) r v^2 + e M_2 (g r - v^2) \right) / (e g M_2 \gamma). \quad (25)$$

Важливо відмітити, що похибки моделі, які виникають внаслідок прийнятих спрощень (22), (23) і (24), не завжди є малими. Наприклад, $\tan \theta$ може досягати значення 0,3, що призводить до похибки в 3% у спрощенні (24). Сумарна похибка може досягати 10%, залежно від швидкості і кута повороту, що робить (25) недостовірним в деяких випадках.

Тим не менш, способи управління, розглянуті в цьому дослідженні, не залежать від рівняння (25). Найбільш важливою характеристикою сферичної робота є те, що чим більшим є кут повороту і чим меншою є швидкість, тим крутішим стає поворот. Використовуючи цю властивість, робот може управляти сам собою за допомогою зворотних зв'язків.

Таким чином, похибка в декілька відсотків не відкидає застосування методів контролю та основні результати цього дослідження.

Поворот кулі на великій швидкості. Коли куля рухається на високій швидкості, ні гіроскопічним ефектом, ні ефектом відцентрової сили не можна нехтувати. Враховуючи, що $\rho \gg r > e$, сила тертя в точці контакту дорівнює:

$$f = F_1 + F_2 = M_1 \rho \Omega^2 + M_2 (\rho - \sin(\gamma - \theta) e) \Omega^2 \approx (M_1 + M_2) \rho \Omega^2. \quad (26)$$

Крутний момент, прикладений до кулі:

$$N = e \sin(\gamma - \theta) M_2 g + e \cos(\gamma - \theta) F_2 - rf \approx M_2 g e \sin(\gamma - \theta) + M_2 \rho \Omega^2 e \cos(\gamma - \theta) - r (M_1 + M_2) \rho \Omega^2; \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \Omega \hat{z} - \dot{\theta} \hat{l} + \omega \hat{k} = \Omega (\cos \theta \hat{m} - \sin \theta \hat{k}) - \dot{\theta} \hat{l} + \omega \hat{k} = \\ &= \Omega \cos \theta \hat{m} + (\omega - \Omega \sin \theta) \hat{k}, \end{aligned} \quad (28)$$

так як $\hat{z} = \cos \theta \hat{m} - \sin \theta \hat{k}$, $\dot{\theta} = 0$.

$$L = I \Omega \cos \theta \hat{m} + I_3 (\omega - \Omega \sin \theta) \hat{k}. \quad (29)$$

$$\bar{M}_N = -N \hat{l} = \frac{dL}{dt} = \Omega \times L =$$

$$= I \Omega^2 \cos \theta \hat{z} \times \hat{m} + I_3 \Omega (\omega - \Omega \sin \theta) \times \hat{k} =$$

$$= I \Omega^2 \cos \theta (-\sin \theta) \hat{l} + I_3 \Omega (\omega - \Omega \sin \theta) (-\cos \theta) \hat{l} =$$

$$= -\hat{l} \left(I \Omega^2 \cos \theta \sin \theta + I_3 \Omega \cos \theta (\omega - \Omega \sin \theta) \right). \quad (30)$$

або, враховуючи, що $(I - I_3) / I_3 \ll 1$, $\Omega / \omega \ll 1$,

$$N = I \Omega^2 \cos \theta \sin \theta + I_3 \Omega \cos \theta (\omega - \Omega \sin \theta) =$$

$$= I_3 \Omega \omega \cos \theta \left(1 + \frac{I - I_3}{I_3} \frac{\Omega}{\omega} \sin \theta \right) = I_3 \Omega \omega \cos \theta, \quad (31)$$

де $\bar{\omega}$ – вектор кутової швидкості кулі; Ω – кутова швидкість обертання кулі; θ – кут крену кулі; L – вектор кутового моменту кулі; I_3 – момент інерції кулі навколо її вісі обертання; I – момент інерції кулі навколо вісі, перпендикулярної до вісі обертання; \bar{M}_N – вектор крутного моменту, прикладеного до кулі. З рівнянь (27) і (31) маємо:

$$M_2 g e \sin(\gamma - \theta) + M_2 \rho \Omega^2 e \cos(\gamma - \theta) - r (M_1 + M_2) \rho \Omega^2 \approx I_3 \Omega \omega \cos \theta. \quad (32)$$

Враховуємо рівняння $\Omega = \omega \cos \theta / \rho$, маємо

$$I_3 \frac{r \omega \cos \theta}{\rho} \omega \cos \theta \approx M_2 g e \sin(\gamma - \theta) + M_2 \rho \frac{r^2 \omega^2 \cos^2 \theta}{\rho^2} \times$$

$$\times e \cos(\gamma - \theta) - r (M_1 + M_2) \rho \cdot \left(r^2 \omega^2 \cos^2 \theta / \rho^2 \right),$$

$$I_3 \frac{r \omega^2 \cos^2 \theta}{\rho} \approx M_2 g e \sin(\gamma - \theta) + M_2 \frac{r^2 \omega^2 \cos^2 \theta}{\rho} \times$$

$$\times e \cos(\gamma - \theta) - r (M_1 + M_2) \cdot \left(r^2 \omega^2 \cos^2 \theta / \rho \right),$$

$$\rho M_2 g e \sin(\gamma - \theta) \approx r \omega^2 \cos^2 \theta (I_3 - M_2 r e \cos(\gamma - \theta) + r^2 (M_1 + M_2)),$$

$$\rho \approx \frac{r \omega^2 \cos^2 \theta (I_3 - M_2 r e \cos(\gamma - \theta) + r^2 (M_1 + M_2))}{M_2 g e \sin(\gamma - \theta)}.$$

Якщо $\theta = 0$ завдяки стабілізуючому гіроскопічному ефекту, отримуємо наступне рівняння:

$$\rho \approx \frac{r \omega^2 (I_3 - M_2 r e \cos \gamma + r^2 (M_1 + M_2))}{M_2 g e \sin \gamma}. \quad (33)$$

Чисельні розрахунки. Задавши параметрами для прототипу робота, можна обчислити радіус повороту для деяких різних умов (рис. 8). Відмітимо, що нульова швидкість означає нескінченно малу швидкість. Вона також може бути витлумачена як характеристики повороту без повного урахування відцентрової сили. Приймаємо для чисельного моделювання такі значення параметрів сферичного робота: $e = 0,06$ м; $g = 9,8$ м/с²; $M_1 = 3,0$ кг; $M_2 = 1,5$ кг; $r = 0,3$ м; $I_3 = J_1 = 6,0 \cdot 10^{-2}$ кг·м²; $v = r \omega$.

Як видно з рисунку, поворот є крутішим при великих кутах повороту і менших швидкостях.

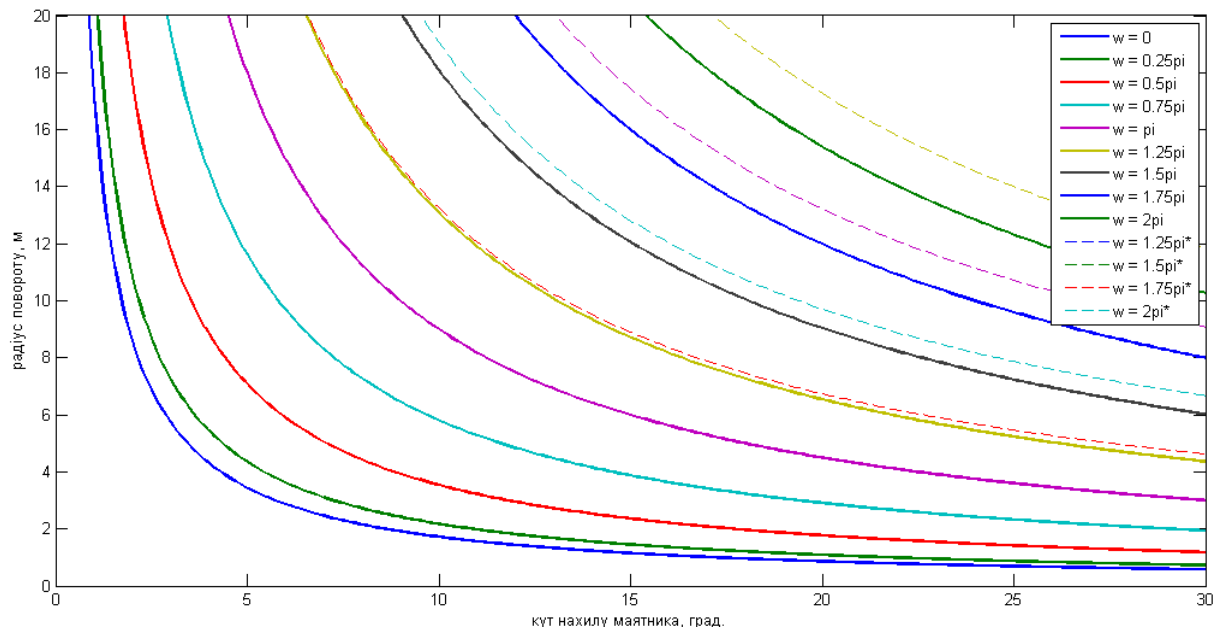


Рис. 8. Залежність радіусу повороту від кута повороту маятника (* – з урахуванням гіроскопічного ефекту)

Висновки

Отримана математична модель руху сферичного робота з маятниковим приводом при прямолінійному русі (по горизонтальній, похилій поверхні та при подоланні перешкод) та повороті дозволяє проводити його імітаційне моделювання як об'єкта управління.

Проведене дослідження залежності радіусу повороту від швидкості і кута повороту робота для руху на низькій, середній і високій швидкостях показало, що з врахуванням гіроскопічного ефекту, чи без нього, основна тенденція не змінюється – чим менша швидкість і чим більший кут повороту маятника, тим меншим буде радіус повороту. Так як ця залежність залишається незмінною незалежно від врахування гіроскопічного ефекту, то синтез системи автоматичного управління рухом сферичного робота можна проводити не враховуючи його.

nisms, Motion Principle, Control Methods and Experimental Results of a Stand-alone Spherical-wheeled Robot) / A. Koshiyama, K. Fujii // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. C (Japanese), 1996. – 62(602):3793-3801.

2. Laplante, J.F. Etude de la Dynamique D'un Robot Spherique et de son effet sur L'attention et la Mobilite de Jeunes Enfants. Génie mécanique / J.F. Laplante. – Université de Sherbrooke, 2004. – 153 p.

3. Spitzmueller S. Microcontroller Based Control System for a Rolling Minirobot. Master's thesis / S. Spitzmueller. – Helsinki University of Technology, 1998.

4. Halme A. Motion control of a spherical mobile robot. Advanced Motion Control / A. Halme, T. Wang // AMC'96-MIE. Proceedings., 4-th International Workshop on, 1, 1996.

5. Иванова Т.Б. Динамика и управление сферическим роботом с осесимметричным маятниковым приводом / Т.Б. Иванова, Е.Н. Пивоварова. // Нелинейная динамика, т. 9, № 3, 2013. – С. 507-520.

6. Баландин Д.В. Управление движением сферического робота с маятниковым приводом / Д.В. Баландин, М.А. Комаров, Г.В. Осипов // Изв. РАН. Теория и системы управления, № 4, 2013. – С. 150–163.

Список літератури

1. Koshiyama A. Development and Motion Control of the All-Direction Steering-Type Mobile Robot (4th Report, Mecha-

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.В. Козелков, Державний університет телекомунікацій, Київ.

Надійшла до редколегії 22.06.2017

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО РОБОТА С МАЯТНИКОВЫМ ПРИВОДОМ

Д.Н. Нелюба

В статье рассматривается построение математической модели движения сферического робота с маятниковым приводом при прямолинейном движении по горизонтальной и наклонной поверхности, при преодолении препятствий и при повороте. С помощью полученной модели проведено исследование зависимости радиуса поворота робота от скорости его движения и угла наклона маятника для движения на низкой, средней и высокой скоростях

Ключевые слова: сферический робот, гироскопический эффект, радиус поворота, маятник.

PENDULUM DRIVEN SPHERICAL ROBOT MOTION MATHEMATICAL MODEL DEVELOPMENT

D.M. Neliuba

The article discusses development of a pendulum driven spherical robot mathematical model for rectilinear motion along horizontal and inclined surfaces, to overcome obstacles and turn. Using resulting model investigated dependence of robot turning radius on its movement speed and pendulum inclination for low, medium and high speeds.

Keywords: spherical robot, gyroscopic effect, turning radius, pendulum.