

В. Д. Карлов¹, О. В. Коломійцев², О. Л. Кузнецов¹, О. В. Бесова¹, А. О. Бесова²

¹ Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків

² Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”, Харків

ОЦІНКИ АСИМПТОТИЧНОЇ СКЛАДНОСТІ ПРИКЛАДНИХ МНОЖИННИХ ТРАНСПОРТНИХ АЛГОРИТМІВ ПРИ ПОДІЛІ ЇХ НА КЛАСТЕРИ

Анотація. Прикладні множинні транспортні алгоритми, як правило, є евристичними та надскладними. За обраною евристикою алгоритму, реальний час на програмну реалізацію залежить від мови програмування, структури представлення вхідних даних та алгоритмічної складності рішення. Дослідження базуються на використанні положень дискретної математики та теорії графів. Показано, що шляхом аналізу асимптотичної складності можливо визначити ефективну евристику. Уточнення моделей прикладних завдань, також, сприяють зменшенню складності. Оскільки, множинність транспортних завдань міститися у дискретному покритті або у функціоналі множинних транспортних засобів, то можливим є спрощення алгоритму шляхом їх декомпозиції на кластери для яких діють умови та обмеження стандартного транспортного завдання. Наведено особливості геометрично та комбінаторного розкладання на кластери. Надано формалізацію алгоритмів побудови кластерів для множинних транспортних завдань. Проведено порівняльний аналіз оптимальних та евристичних алгоритмів вирішення множинних транспортних завдань. Визначено ієрархію асимптотичної складності евристичних алгоритмів та проаналізовано можливості їх декомпозиції на кластери за якими досягається спрощення вирішення множинних прикладних транспортних завдань. Надано нотації складності рішення та можливості їх оцінки за цільовою функцією обраного алгоритму або за її апроксимацією. Здійснено аналіз асимптотичної складності евристичних алгоритмів для Big-O нотації. Показано, що придатними для реалізації є алгоритми, складності яких не перевищують поліноміальної, а застосування алгоритмів, які мають експонентну оцінку складності та вище є не бажаним. Зазначено, що асимптотичні оцінки складності алгоритму придатні для великих за розмірністю завдань, а для завдань невеликої розмірності доцільними є контрольні прогони.

Ключові слова: асимптотична складність, евристика, кластери, логістичне забезпечення, множинні транспортні завдання, нотації, система невідкладної допомоги, транспортні засоби, цільова функція.

Вступ

Постановка проблеми. На сучасному етапі розвитку науки і техніки набуває актуальності оперативне і оптимальне розв’язання завдань багатоконфліктних ситуацій. Зокрема, до них відносяться такі глобальні ситуації як: природні катаклізми, пандемії, збройні конфлікти тощо. При цьому, їх успішне вирішення вимагає вдосконалення існуючих та створення новітніх систем логістичного забезпечення. У широкому сенсі логістика має на меті оптимальне управління матеріальними, інформаційними та фінансовими ресурсами в економічних адаптивних системах. У вузькому сенсі логістика є функцією системи щодо забезпечення переміщення та зберігання вантажу для виробництва, обміну та продажу. Ведення широкомасштабних бойових дій на території держави логістична галузь в цілому характеризується низькою проблем, до яких належать:

- зруйнована або пошкоджена інфраструктура;
- обмеження доступу до території;
- збільшення ризику втрат вантажу;
- зростання цін на логістичні послуги.

В даних надважких умовах найважливішим питанням є утримання логістичної галузі на потрібному рівні та максимальне сприяння її подальшому розвитку. Зокрема, це стосується створення системи невідкладної допомоги (СНД), на яку покладається вирішення наступних логістичних завдань:

- доставки гуманітарної допомоги та товарів першої необхідності в постраждалих від бойових дій райони;
- термінове постачання медикаментів для забезпечення лікування хворих;

– евакуацію людей з постраждалих від війни районів.

У випадку призупинення бойових дій або взагалі закінчення війни важливість СНД суттєво зростатиме, забезпечуючи відновлення інфраструктури держави та постачання сучасного обладнання для потреб її галузей.

Незважаючи на складні умови, логістична галузь держави продовжує розвиток. При цьому ключові напрямки розвитку логістики пов’язані насамперед з розвитком логістичної інфраструктури, а також покращенням функціоналу транспортних засобів (ТЗ) та систем їх керування.

Інтерес до множинних транспортних завдань mTSP (Multiple Delivery for Traveling Salesman Problem) пов’язано з їх широким застосуванням, зокрема для побудови найкоротших маршрутів множини вантажних ТЗ в умовах впливу вказаних вище заважаючих факторів.

У mTSP у якості множини може розглядатися покриття ТЗ або їх функціонал. Тобто множинні алгоритми, як правило, є спрямованими або на оптимізацію моделі дискретного покриття або на вибір множини ТЗ для довільного сценарію.

Представляє практичний інтерес розгляд стаціонарного дискретного покриття і можливості розподілу його на кластери, що не перетинаються при використанні множини ТЗ.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Аналіз проблеми маршрутизації ТЗ при доставці та самовивозі вантажу проведено у [1]. Зокрема у [2] визначено проблеми логістики стосовно закладів охорони здоров’я. Новітнім та перспективним підходом до оптимізації вирішення логістичних завдань є

застосування безпілотних літальних апаратів (БПЛА) [3]. При цьому практичний інтерес представляє собою застосування мурашиного алгоритму управління групою БПЛА [4], розглядати який доцільно з точки зору положень теорії [5]. Вказаним питанням присвячено роботи [6; 7], зокрема, у [7] проведено огляд проблем динамічної маршрутизації ТЗ. Відповідні фундаментальні положення теорії сучасних алгоритмів викладено у [7; 8], а особливості мурашиних алгоритмів при вирішенні транспортних завдань наведено у [9; 10]. Оптимізації вказаних алгоритмів присвячено роботу [11], при цьому стосовно множинних транспортних алгоритмів доцільним є визначення їх асимптотичної складності.

Метою статті є визначення асимптотичної складності прикладних множинних транспортних алгоритмів при поділі їх на кластери.

Виклад основного матеріалу

Розгляд зазначених питань базується на використанні положень дискретної математики та теорії графів. Теорія графів дозволяє визначати взаємозв'язки з урахуванням втрати вантажів та надає можливість щодо вибору оптимальних маршрутів при забез-

печенні логістики та вдосконалення алгоритмів керування ТЗ. Послідовність вирішення завдання є такою:

1. За сценарієм поставленого завдання здійснюється його формалізація та створюється граф покриття [4; 5].

2. За результатами аналізу структури покриття визначається алгоритм вирішення.

3. Уточнюється структура покриття, статистичні характеристики переходів та вагові коефіцієнти втрат.

4. Аналізується складність алгоритму та визначається можливість переходу від множинної транспортної задачі до суперпозиції стандартних транспортних задач.

5. За обраного алгоритму здійснюється декомпозиція покриття на кластери.

6. На основі індивідуальних рішень для кожного кластеру виконується пошук загального рішення.

За відомим прикладним сценарієм для формалізації завдання важливим кроком є проведення аналізу геометричних характеристик покриття і функціоналу ТЗ, що дозволить здійснити вибір алгоритму рішення mTSP.

Можливий варіант послідовності аналізу прикладного сценарію наведено у табл. 1.

Таблиця 1 – Послідовність аналізу прикладного сценарію множинних транспортних завдань [5; 7]

1.	<i>Оцінка геометричних характеристик покриття</i>			
	Кількість споживачів (N)	Кількість сховищ вантажу ©	Максимальна відстань між споживачами (Δr^{max})	Середня відстань між споживачами ($\Delta \bar{r}$)
2.	<i>Оцінка характеристик переходів між споживачами</i>			
	Можлива кількість переходів (N-1)	Привабливість $i \leftrightarrow j$ переходу ($\tau_{i \leftrightarrow j}$)	Доступність $i \leftrightarrow j$ переходу ($\eta_{i \leftrightarrow j}$)	Імовірності появи $i \leftrightarrow j$ переходу (P_i, P_j)
3.	<i>Оцінка функціоналу ТЗ</i>			
	Кількість ТЗ (M)	Вантажопідйомність (q_m)	Дальність руху транспортного засобу на одній заправці ΔR_m	Вартість одного переходу $i \leftrightarrow j$ між споживачами ($d_{i \leftrightarrow j}$)
4.	<i>Синтез (вибір) алгоритму рішення завдання</i>			
	оптимальні (точні)		евристичні (наближені)	мета-евристичні
5.	<i>Оцінка можливості побудови кластерів покриття</i>			
6.	<i>Вибір алгоритму створення кластерів та оцінка їх характеристик</i>			
	кількість кластерів (K)	геометричні характеристики кластерів	характеристики переходів між споживачами	

Для вирішення mTSP існують точні (оптимальні) та наближені (евристичні) алгоритми [7].

Оптимальні алгоритми будуються за принципом повного перебору усіх переходів системи та їх характеристик і мають властивість давати максимально точний результат рішення mTSP.

Оптимальні алгоритми формалізовано на повних матричних систем рівнянь за якими будуються графи mTSP [7; 11]. Недоліком оптимальних алгоритмів є їхня надвелика складність, тому їх доцільно застосовувати лише для малорозмірних mTSP.

Для вирішення прикладних завдань генерують евристичні алгоритми, які мають певні обмеження та дають наближені рішення, але вони є менш складними та потребують меншого часу на отримання рішень порівняно з точними алгоритмами. Евристичні алгоритми створюють за формальними процедурами [8; 9], тобто mTSP є завжди не повними, а їх евристичні рішення є не точними. Особливістю даних алгоритмів є їхня різноманітність, а їхня обмежена дія поширюється на початкові дані, час виконання завдання та точність рішення.

До основних евристичних алгоритмів відносяться наступні:

1. Евристичні екологічні алгоритми EAs (Evolutionary Algorithms), які ґрунтуються на принципах еволюції живої природи.

До категорії EAs належать [12]:

– алгоритм завихрення повітря BWOAs (Back Wash Optimization Algorithms);

– алгоритм руху окремих частинок у хмарах PSOAs (Particle Swarm Optimization Algorithms).

2. Евристичні біологічні алгоритми BAs (Biology-inspired Algorithms), які моделюють процеси адаптації популяції живих істот та створюють рішення, що самооптимізуються. Це [12]: – генетичні алгоритми GAs (Genetic Algorithms), які моделюють зростання, розвиток, розмноження, відбір і виживання в умовах накопичення представників окремого виду; алгоритми рисового поля PFAAs (Paddy Field Algorithms), що моделюють дії окремих складових популяції, які повторюються; алгоритм дії бджолиної колонії, що моделює дії бджолиного рою; алгоритм світлячка FAs (Firefly Algorithms), що

моделюють пошук комах; мурашиний алгоритм ACOAs (Ant Colony Optimization Algorithms), що моделюють сумісний пошук мураками їжі [4]; алгоритм пошуку бактеріями джерел живлення BFAs (Bacteria Foraging Algorithms), що моделюють процес обміну у колонії бактерій.

Вибір конкретного виду алгоритму для вирішення mTSP здійснюється за можливістю формалізації покриття та складністю їх реалізації [5; 7].

У 2002 році було запропоновано формалізацію завдання маршрутизації mTSP у загальному просторі покриття при отриманні та доставці вантажу наступним чином [4; 8]. Априорними даними є:

- геометрія покриття, яке має A_n ($n \in N$) реперних точок (РТ), координати яких є відомими;
- у покритті існують сховища вантажу $\odot$ ($\odot \in N$) та пункт доставки вантажу $\otimes$ ($\otimes \in N$);
- існують m ($m \in M$) ТЗ ($M > 1$), що знаходяться у сховищі вантажу $\odot$.

Потрібно знайти найкращий перехід $R_{\odot \rightarrow \otimes \rightarrow \odot}^{best}$, а усі проміжні РТ_n потрібно покрити тільки один раз.

За дискретним покриттям можлива формалізація завдання за допомогою графу:

$$G = A \times R \times D = A \times V, \quad (1)$$

де G – граф завдання; A – граф координат РТ; R – граф переходів; D – граф втрат для переходів ($r_{i \rightarrow j}$).

Всі m ТЗ знаходяться у сховищі вантажу $\odot$. На рис. 1 надано приклад розподілу загального простору покриття mTSP на три кластери TSP1, TSP2 та TSP3, які не перетинаються для одного сховища вантажу $\odot$.

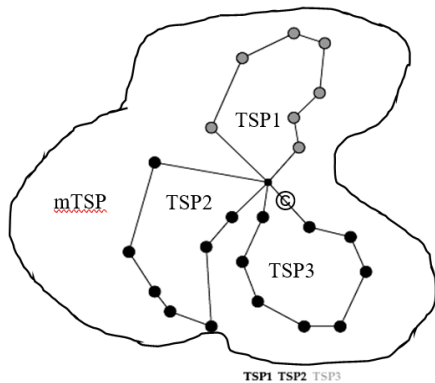


Рис. 1. Приклад розподілу загального простору покриття mTSP на три кластери, які не перетинаються для одного сховища вантажу

Цільова функція f завдання (1) передбачає пошук найкращих переходів всіх ТЗ $R_{\odot \rightarrow \otimes \rightarrow \odot}^m$, які починаються у $\odot$, проходять $\otimes$, покривають всі РТ та закінчуються у $\odot$. Усі поточні РТ розподілено за конкретних маршрутів ТЗ, тому:

$$\begin{aligned} R_{\odot \rightarrow \otimes \rightarrow \odot}^m &\Rightarrow \min \sum_{n=1}^N \left(r_{\odot \rightarrow \otimes_n \rightarrow \odot}^m \right), \\ D_{\odot \rightarrow \otimes \rightarrow \odot}^m &\Rightarrow \min \sum_{n=1}^N \left(d_{\odot \rightarrow \otimes_n \rightarrow \odot}^m \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$V_{\odot \rightarrow \otimes \rightarrow \odot}^m \Rightarrow \min \sum_{n=1}^N \left(v_{\odot \rightarrow \otimes_n \rightarrow \odot}^m \right).$$

Якщо ТЗ знаходяться на переході $i \rightarrow j$, то $(d_{i \rightarrow j}^m) = 1$, а для протилежного випадку $(d_{j \rightarrow i}^m) = 0$ виконується умова:

$$S_K^m \leq n_i \leq S_L^m, \quad (3)$$

де: n_i^m – кількість РТ покритих m ТЗ до покриття РТ; S_L^m – максимальна можлива кількість покриття РТ, S_K^m – мінімальна кількість покриття РТ для m -го транспортного засобу. Для цього випадку формалізацію mTSP можливо представити у вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{j=2}^{n_i} v_{1 \rightarrow j}^m = \sum_{j=2}^{n_i} v_{j \rightarrow 1}^m = m, \\ \sum_{i=1}^n v_{i \rightarrow j}^m = 1, \quad j = [2 \dots n], \quad \sum_{j=1}^n v_{i \rightarrow i}^m = 1, \quad i = [2 \dots n], \\ v_{\odot \rightarrow j}^m + (S_L - 2)v_{1 \rightarrow i}^m - v_{i \rightarrow 1}^m \leq (S_L - 1), \\ v_{\odot \rightarrow i}^m + (2 - S_K)v_{i \rightarrow 1}^m + v_{1 \rightarrow i}^m \geq 2, \quad i = [2 \dots n], \\ v_{1 \rightarrow i} + v_{i \rightarrow 1} \leq 1, \quad i = [2 \dots n], \\ v_{i \rightarrow j}^m \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in N, \end{cases} \quad (4)$$

а цільова функція f має вигляд:

$$\begin{cases} f(m, d, r) = \min \sum_{i, j \in N} d_{i \rightarrow j}^m \times r_{i \rightarrow j}^m, \\ f(m, r) = \min \sum_{i, j \in N} r_{i \rightarrow j}^m, \\ f(m, d) = \min \sum_{i, j \in N} d_{i \rightarrow j}^m, \\ f(m, v) = \min \sum_{i, j \in N} v_{i \rightarrow j}^m. \end{cases} \quad (5)$$

За виконанням (5) можливою є мінімізація довжини маршрутів (переходів), а також мінімізація втрат, що залежить від кількості РТ (N) та кількості ТЗ (M). Умова виконання (4) визначає можливість розподілу загального простору покриття на K кластерів для яких діють умови та обмеження стандартного завдання TSP [8]. Враховуючи прикладні сценарії СНД множинна задача логістики, її формалізація та обмеження є наступними [5]:

– існує логістична система, геометрія якої має ($n \in N$) окремих РТ, які потрібно обслужити (покрити). Параметр n показує номер поточної РТ;

– логістична система обслуговується ($m \in M$) однотипними ТЗ, які мають однакову вантажопідйомність (q_m) і дальність руху на одній заправці ΔR_m . Параметр m показує дійсну кількість ТЗ, що застосовуються для обслуговування окремої РТ;

– доставка вантажу здійснюється за i -м ($i \in I$) запитом. Параметр i показує номер запиту на транспортування вантажу у РТ;

– для кожної i -ї реалізації запиту вантаж q_i має бути доставлений з РТ n_i у РТ n_j^+ або у РТ n_j^- . Позитивне значення n_j^+ відповідає вивезенню вантажу, а негативне значення n_j^- для його ввезення у j -ту РТ. Підпростори n_i^+ , n_i^- та n_j^+ , n_j^- не перетинаються, оскільки $n_{i,j}^+ \in N^+$, а $n_{i,j}^- \in N^-$, а простори N^+ , N^- для усіх поточних i та j одночасно не існують. Параметр j показує набір реалізованих запитів на транспортування вантажу у РТ;

– граф покриття СНД G має N вершин (РТ) та $(N-1)$ ребер (переходів), для якого $n_i^+ = n_i^-$. Вершини n_i^+ має бути відвідані раніше, ніж n_i^- ;

– кожен з m ТЗ здійснює рух за маршрутом $R^m \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, тобто починає свій шлях у сховище $\mathbb{C}$, досягає $\mathbb{R}$, покриває інші РТ і повертається до $\mathbb{C}$;

– привабливість кожного переходу $\tau_{i \rightarrow j}$ є об'єктивним щодо його довжини, $\tau_{i \rightarrow j} = 1/r_{i \rightarrow j}$;

– доступність кожного переходу $n_{i \rightarrow j}$ залежить від можливих втрат вантажу $d_{i \rightarrow j}$, тобто визначаються якістю (оперативною обстановкою) на переході $r_{i \rightarrow j}$;

– маршрути M ТЗ покривають усі РТ усіх K кластерів простору покриття. Кількість кластерів не перевищує кількість ТЗ ($K \leq M$);

– якщо множина РТ n_i^+ належить до N , то i -та множина РТ n_i^- також належить до N і навпаки;

– завантаженість кожного ТЗ у час відбуття з РТ не перевищує завантаженості у час прибуття у РТ, тобто $q_m^+ \leq q_m^-$.

Таким чином ефективним способом вирішення mTSP є створення кластерів, тобто розкладання загального графу G за стрічками, стовбцями та окремими майданчиками покриття різної форми (геометричне розкладання) або за відповідними правилами розподілу (комбінаторне розкладання).

Розподіл загального простору покриття на K кластерів дозволяє здійснювати паралельні обчислення G^k ($k \in K$) та забезпечувати наближення множинних транспортних алгоритмів до стандартних [3].

Формалізація алгоритмів побудови кластерів для множинних транспортних завдань може бути надана наступним чином [11].

Заданим вважається граф покриття $G=(A,R,D)$, що має РТ A_n , де кожному поточному переходу $r_{i \rightarrow j}$ відповідає вага $d_{i \rightarrow j}$. Потрібно зробити розбиття G на K кластерів, тобто розподіл A_n на підмножини A_n^k , які не перетинаються та мають максимально близьку сумарну вагу або мінімальну сумарну довжину переходів, що покривають отримані підмножини РТ A_n^k [11].

Геометричні алгоритми розкладання (розбиття) генеруються згідно координатної інформації A_n та $r_{i \rightarrow j}$ покриття графа G . Дані алгоритми відносяться до малоскладних, однак вони не приймають до уваги інформацію щодо ваги $d_{i \rightarrow j}$ та не можуть явно привести до мінімізації шляхів та мінімізації сумарних втрат для кожного окремого кластеру.

До геометричних методів розбиття відносять:

– рекурсивний інерційний метод “розподілу навіп”, для якого можливо застосувати рекурсив-

ний багатобінарний метод поділу, що дозволяє на першій ітерації поділити граф на дві частини, на другій ітерації кожна з отриманих частин також розбивається на дві частини і так далі;

– “по-координатне розбиття” на першій ітерації вимагає побудови головної вісі симетрії покриття та лінії ортогональної отриманої вісі. На наступних ітераціях РТ кожного підпростору проектується на максимальну вісь і далі процедура повторюється;

– поділ мереж за використанням кривих Пеано. Криві Пеано є кривими, що повністю заповнюють фігури великих розмірностей (наприклад, квадрат або трикутник), тому кластери мають відповідну форму.

За обраним алгоритмом, реальний час програмної реалізації залежить від мови програмування, типу ЕОМ та структури представлення вхідних даних. Тобто, алгоритмічна складність здійснює найбільший вплив на час вирішення завдання [11; 12]. Для оцінки складності алгоритму існують асимптотичні визначення, що поділяються на три нотації:

– тета-нотація (θ -нотація) охоплює функцію складності зверху і знизу, тобто виявляє максимальні та мінімальні інтервали складності. Використовується для аналізу середньої складності алгоритму;

– омега нотація (Ω -нотація) виявляє нижню межу складності алгоритму, тому вона використовується для аналізу мінімальної (найкращої) складності алгоритму;

– Big-O-нотація (O-нотація) вказує верхню межу складності алгоритму, тому вона використовується для аналізу максимальної (найгірший) складності алгоритму.

Для аналізу прикладних алгоритмів використовується MIN-MAX підхід, що вимагає Big-O нотації, оскільки практичний інтерес представляє найгірший сценарій [12]. При цьому складність розглядається як функція від основних параметрів завдання.

Наприклад, якщо оцінюється складність транспортного алгоритму завдання якого представлено одновимірним графом покриття (1) для якого існує цільова функція рішення f , то в якості параметра береться кількість РТ N . Оскільки розглядається граф $G(N)$, то цільова функція рішення є також функцією порядку $f(N)$, яку можна апроксимувати функцією $g(N)$. Для визначення функції f алгоритм розбивають на окремі кроки та намагаються оцінити кожен крок через параметр N . Тому пошук f залежить від кількості РТ та переходів графу G , тобто

$$\lim_{n \rightarrow N} \frac{g(n)}{f(n)} \Rightarrow 1, \quad n \in (1, N), \quad (6)$$

а асимптотичні складності транспортних алгоритмів для нотацій (θ, Ω, O) виявляється за:

$$\theta[g(N/2)], \quad \Omega[g(1)], \quad O[g(N)]. \quad (7)$$

Вибір функції апроксимації $f(N)$ дозволяє отримати оцінки асимптотичної складності алгоритму [11]: $f(N)$ – лінійна оцінка; $f(N \log(N))$ – логарифмічна оцінка; $f(N^2)$ – квадратична оцінка; $f(a_0 \cdot N^q + a_1 \cdot N^{q-1} + a_2 \cdot N^{q-2} \dots + a_q)$ – поліноміальна оцінка; $f(a^N)$ – експоне-

тна оцінка; $f(N^N)$ – надекспонентна оцінка; $f(N!)$ – факторіальна оцінка; $f(N \cdot N!)$ – надфакторіальна оцінка.

За складністю усі алгоритми можуть бути поділені на класи: horrible (жахливі); bad (погані); fair (справедливі); good (добрі). До “практичних” алгоритмів (придатних для реалізації) відносяться алгоритми третього та четвертого класів, оцінки складності яких не перевищують поліноміальної. До “непрактичних” алгоритмів належать алгоритми, що мають експонентну оцінку складності та вище. На рис. 2 наведено класи складності та функції апроксимації цільової функції алгоритмів вирішення транспортних завдань [11]. Асимптотичні складності деяких алгоритмів вирішення множинних транспортних завдань та створення кластерів наведено у табл. 2.

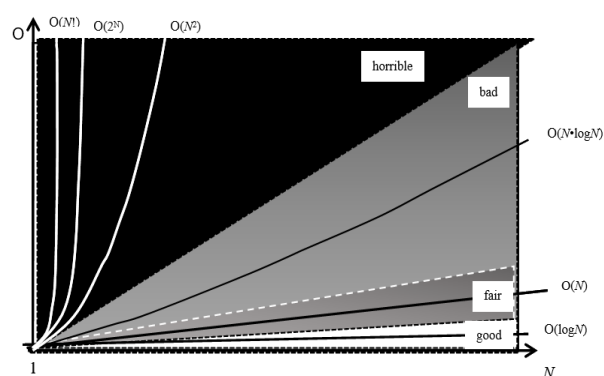


Рис. 2. Класи складності та функції апроксимації цільової функції алгоритмів вирішення транспортних завдань [11]

Таблиця 2 – Асимптотичні складності алгоритмів вирішення множинних транспортних завдань та створення кластерів

Алгоритм	Базовий параметр	Big-O нотації	Клас складності
Повного перебору контурів Гамільтону	N	$(N-1) \cdot N!$	Horrible
Дерев (Гілок) та обмежень	N	$N^5 \log(N)$	Horrible
Динамічного програмування	N	N^N	Horrible
Завихрення повітря BWO As	N	$0,33 \cdot N^3 + 0,25 \cdot N^2 + 0,5 \cdot N + 16,2$	Bad
Руху окремих частинок у хмарах PSO As	N	$N e^N$	Bad
Рисового поля PFA As	N	$a_0 \cdot N^q + a_1 \cdot N^{q-1} + a_2 \cdot N^{q-2} \dots + a_q$	Bad
Генетичний GA As	N	$(N-1) \cdot N^2$	Bad
Бджолині колонії BCO As	N	$(N-1) \cdot N^2$	Bad
Світлячка FFA As	N	$(N-1) \cdot N^2$	Bad
Мурашині ACO As	N	$(N-1) \cdot N^2$	Bad
Пошуку бактеріями живлення BFA As	N	$N!$	Bad
Розбиття по координатам	N	N	Good
Рекурсивний поділу навпіл	N	2^N	Good
За використання кривих Пеано	K	$\log K$	Good
З урахуванням зв'язності	K, N	$K \cdot N$	Fair
Кернігана-Ліна	K, N	$K \cdot N^2$	Fair

Висновки

Інтерес до прикладних множинних транспортних завдань (mTSP) інспіровано новими технологіями ТЗ, їх моніторингу та керуванням в умовах перешкод. Множинні алгоритми, як правило, спрямовані на оптимізацію моделі дискретного покриття для випадкового ігрового сценарію, що дозволяє формалізувати завдання з графів вагових коефіцієнтів переходів покриття для всіх ТЗ.

Створення mTSP моделі має обмеження на вхідні характеристики, що обумовлює потребу у евристичних алгоритмах, які мають надскладні рішення. Розглянуто стаціонарне дискретне покриття СНД та гіпотезу можливості розподілу його на кластери, які

не перетинаються при використанні множини ТЗ. Це дозволяє здійснювати вибір та спрощувати рішення для евристичних алгоритмів. Показано нотації складності рішення та можливості їх оцінки за цільовою функцією обраного алгоритму або за її апроксимацією. Зроблено аналіз асимптотичної складності евристичних алгоритмів для Big-O нотації. Показано, що придатними для реалізації є алгоритми, складності яких не перевищують поліноміальної, а застосування алгоритмів, що мають експонентну оцінку складності та вище не є бажаним.

Зазначено, що асимптотичні оцінки складності алгоритму придатні для великих розмірностей завдання, а для завдань невеликої розмірності доцільними є контрольні прогони.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- Wassan N. A., Nagy G. Vehicle Routing Problem with Deliveries and Pickups: Modelling Issues and Metaheuristics Solution Approaches *Int. Journal of Transp.* 2014. Vol.2. № 2 (1). Pp. 95-110. https://article.nadiapub.com/IJT/vol2_no1/6.pdf.
- Коломоєць А., Толстанов О., Михальчук В., Гбур З., Кошова С. Системи логістики та логістичних підходів в управлінні закладами охорони здоров'я. Кам'янець-Подільський: ТОВ «Друкарня «Рута»», 2021. 348 с.
- Погудіна О. К., Крицький Д. М., Биков А. М., Пластун Т. А., Пивовар М. В. Методологія формування інтелектуальної складової агентної системи рою безпілотних літальних апаратів. Монографія. Харків: НАУ ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», 2021. 211 с. <https://odnb.odessa.ua/vnn/book/12456>.
- Dorigo M., Gambardella L. M. Ant Colony System: A cooperative learning approach to the Traveling Salesman Problem. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. 1997. № 1 (1). Pp. 53-66. <https://ieeexplore.ieee.org/document/585892>.
- Cordeau J. F., Laporte G., Ropke S Recent Models and Algorithms for One-to-One Pickup and Delivery Problems. New York: Springer, 2008. Pp. 327-357. DOI: 10.1007/978-0-387-77778-8_15.

6. Іваненко Ю. В., Ляшенко О. С., Філімончук Т. В. Огляд методів керування безпілотними літальними апаратами. *Системи управління, навігації та зв'язку*. 2023. № 1 (71). С. 26-30. <https://www.researchgate.net/publication/369874368>
7. Pillac V., Gendreau M., Gu'eret C., Medaglia A. A review of dynamic vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*. 2012. № 225 (1). Pp. 1-11. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.08.015>.
8. Темнікова О. Л. Математична логіка та теорія алгоритмів. Київ : КПІ ім. І. Сікорського, 2021. 177 с.
9. Dorigo M., Bonabeau E., Theraulaz G. Ant Algorithms and Stigmergy. *Future Generation Computer Systems*. 2000. № 16(8). Pp. 851–871. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167739X0000042X>.
10. Brezina I., Čičková Z. Solving the Travelling Salesman Problem Using the Ant Colony Optimization. *Management Information Systems*. 2011. Vol. 6 № 4 – Pp. 10-14. <https://www.researchgate.net/publication/264855262>.
11. Germenchuk M. S. Solvability of pseudobuluous conditional optimization problems of the type of many salesmen. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 2020. № 4 (49). Pp. 30-55. <https://tvim.su/en/node/1044>.
12. Hosny M. Investigating Heuristic and Meta-Heuristic Algorithms for Solving Pickup and Delivery Problems. 2010. 266 p.

Received (Надійшла) 24.08.2025

Accepted for publication (Прийнята до друку) 29.10.2025

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ / ABOUT THE AUTHORS

Карлов Володимир Дмитрович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фізики та радіоелектроніки, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна;
Volodymyr Karlov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Physics and Radio Electronics, Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, Ukraine;
 e-mail: karlovvd@ukr.net; ORCID Author ID: <https://orcid.org/0000-0002-1043-684X>;
 Scopus Author ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56941529900>.

Коломійцев Олексій Володимирович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерної інженерії та програмування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна;
Oleksii Kolomiitsev – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Computer Engineering and Programming Department, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine;
 e-mail: Oleksii.Kolomiitsev@khp.edu.ua; ORCID Author ID: <https://orcid.org/0000-0001-8228-8404>;
 Scopus Author ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57211278112>.

Кузнєцов Олександр Леонідович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фізики та радіоелектроніки, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна;
Oleksandr Kuznietsov – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Physics and Radio Electronics, Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, Ukraine;
 e-mail: kuznetssovOL@ukr.net; ORCID Author ID: <https://orcid.org/0000-0002-5915-8107>;
 Scopus Author ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57202953428>.

Бєсова Оксана Васи́лівна – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна;
Oksana Biesova – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, Ukraine;
 e-mail: BiesovaOV@ukr.net; ORCID Author ID: <https://orcid.org/0000-0001-7744-1339>;
 Scopus Author ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57220834978>.

Бєсова Анна Олексіївна – студентка кафедри "Комп'ютерна інженерія та програмування", Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", Харків, Україна;
Anna Biesova – student, Department of Computer Engineering and Programming, National Technical University 'Kharkiv Bєсова Оксана Васи́лівна Polytechnic Institute', Kharkiv, Ukraine;
 e-mail: Anna.Biesova@cs.khp.edu.ua; ORCID Author ID: <https://orcid.org/0009-0004-4788-0137>.

Estimations of the asymptotic complexity of applied multiple transport algorithms when divisioning them into clusters

Volodymyr Karlov, Oleksii Kolomiitsev, Oleksandr Kuznietsov, Oksana Biesova, Anna Biesova

Abstract. Applied multiple transport algorithms are usually heuristic and overly complex. Depending on the chosen heuristic of the algorithm, the real time of the software implementation depends on the programming language, the structure of the input data representation and the algorithmic complexity of the solution. The research is based on the use of the provisions of discrete mathematics and graph theory. It is shown that by analyzing asymptotic complexity it is possible to determine effective heuristics. Refinement of applied problem models also contributes to reducing complexity. Since the multiplicity of transport tasks is contained in a discrete coverage or in the functionality of multiple vehicles, it is possible to simplify the algorithm by decomposing them into clusters for which the conditions and constraints of the standard transport task apply. The features of geometric and combinatorial decomposition into clusters are presented. The formalization of cluster construction algorithms for multiple transport problems is provided. A comparative analysis of optimal and heuristic algorithms for solving multiple transport problems is carried out. The hierarchy of asymptotic complexity of heuristic algorithms is determined and the possibilities of their decomposition into clusters are analyzed, which simplify the solution of multiple applied transport problems. The notation of the complexity of the solution and the possibility of their evaluation by the objective function of the selected algorithm or by its approximation are provided. An analysis of the asymptotic complexity of heuristic algorithms for Big-O notation has been carried out. It has been shown that algorithms with a complexity not exceeding polynomial are suitable for implementation, and the use of algorithms with an exponential complexity estimate and higher is undesirable. It is noted that asymptotic estimates of algorithm complexity are suitable for large-dimensional tasks, and for tasks of small dimension, control runs are appropriate.

Keywords: asymptotic complexity, heuristics, clusters, logistics, multiple transportation tasks, notations, emergency care system, vehicles, objective function.