УДК 621.37:621.391

С.Г. Веклич

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМА ГЕРЦЕЛЯ И СПОСОБА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ СЛОЖНЫХ СИГНАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ ОТДЕЛЬНЫХ ТОНОВ СИГНАЛА

Рассмотрен алгоритм Герцеля селективного спектрального анализа, предложен способ линейной алгебраической обработки сложных сигнальных конструкций при обнаружении отдельных тонов в спектре сигнала. Произведен анализ эффективности известного и предложенного способа селективного спектрального анализа.

Ключевые слова: *быстрое преобразование Фурье (БПФ), фильтр с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры), система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), цифровая обработка сигналов.*

Введение

В современных условиях, характеризуемых сложностью задач, решаемых радиосистемами, и разнообразием помеховой обстановки, разработка достаточно совершенных систем возможна лишь на базе современных методов оптимизации. Общую проблему синтеза радиотехнических систем условно можно подразделить на две частные задачи: выбор «наилучших» сигналов для достижения требуемого результата с учетом реальной обстановки и оптимальная обработка принимаемых сигналов.

Традиционным методом первичного выявления параметров и демодуляции контролируемых сигналов в настоящее время является их анализ на основе алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). Использование алгоритмов БПФ для обработки OFDM сигнала предполагает наличие точной информации на приемной стороне о ряде параметров сигнала. При решении задач радиомониторинга и демодуляции эти данные, как правило, неизвестны [1].

Аппарат БПФ, оптимизированный по вычислительным затратам на основе алгоритмов прореживания по частоте или времени, не всегда является предпочтительным с точки зрения избыточной размерности задачи. К примеру, если спектр сигнала на интервале дискретности канала состоит из малого числа квадратурных частотных компонент $f_1, f_2, \ldots, f_m >> 0$, то для его полной обработки достаточно вычислить только m амплитудных коэффициентов. Если использовать БПФ, то на основании свойств вычислительного алгоритма определение осуществится для $2 \cdot T \cdot f_m >> m$ амплитуд, т.е. решится чрезмерно избыточная задача [2].

В связи с этим, развитие программно-аппаратных средств цифровой обработки сигналов, ориентированных только на использование алгоритмов БПФ не всегда является оправданным. Представляет интерес разработка теоретических и практических основ применения обычного аппарата линейной алгебры для оптимизации вычислительных затрат и повышения характеристик точности распознавания и демодуляции сложных сигналов. Рассмотрим некоторые алгоритмы и методы обработки сигналов, которые позволяют обнаруживать отдельные тоны сигнала, не решая избыточную задачу.

1. Алгоритм Герцеля обнаружения отдельных гармонических компонент

Алгоритм Герцеля представляет собой процедуру вычисления дискретного преобразования Фурье. Он позволяет уменьшить число необходимых умножений, но на очень малый множитель. Сложность данного алгоритма равна n^2, поэтому он не принадлежит к алгоритмам БПФ. Алгоритм Герцеля полезен в тех случаях, когда требуется вычислить малое количество компонент преобразования Фурье, – как правило, не более чем $\log_2 n$ из n компонент. Так как БПФ-алгоритмы вычисляют все компоненты преобразования, то в этих случаях приходится отбрасывать ненужные компоненты [3] Алгоритм Герцеля позволяет вычислять значение k-го бина N-точечного ДПФ:

$$S_N(k) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n) \cdot W_N^{kn}, \quad W_N^{kn} = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right) \quad (1)$$

и представляет собой БИХ-фильтр второго порядка с двумя действительными коэффициентами в обратной связи и одним комплексным коэффициентом в прямой связи фильтра. Структура цифрового фильтра Герцеля приведена на рис. 1.

Для получения указанных значений k-го коэффициента ДПФ в алгоритме Герцеля сохраняется только каждое $(N-1)$-е значение этого коэффициента, что обеспечивает проведения одной операции комплексного умножения в прямой цепи фильтра и N действительных операций по вычислению промежуточных результатов в обратной цепи фильтра.

Отметим, что именно отказ от получения всех выходных отсчетов (следовательно, и их сохранения) в прямой цепи фильтра обеспечивает алгоритму Герцеля экономию в числе вычислений по сравнению с определением k-го коэффициента ДПФ $S_N(k)$, «в лоб», согласно соотношению (1).

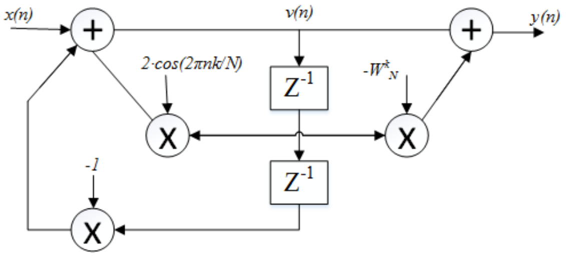

Рис. 1. Структура БИХ-фильтра, реализующая алгоритм Герцеля

Выходной сигнал фильтра $y(n)$ равен отсчету ДПФ $X(m)$ в момент времени $n = N$, если индекс первого отсчета сигнала $n = 0$. Чтобы результат был эквивалентен ДПФ, индекс частотной области m должен быть целым числом в диапазоне $0 \le m \le N - 1$.

Передаточная функция фильтра Герцеля имеет следующий вид:

$$H_G(z) = Y(z)/X(z) = \frac{1 - e^{-j2\pi m/N} \cdot z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi m/N) \cdot z^{-1} + z^{-2}}, \quad (2)$$

где $z^{-1} = e^{-j\omega t}$, а $z^{-2} = e^{-j2\omega t}$.

Разностные уравнения фильтра Герцеля во временной области задаются следующим образом:

1. Вычисляются коэффициенты обратной связи фильтра:

$$v(n) = 2\cos(2\pi m/N) \cdot v(n-1) - v(n-2) + x(n). \quad (3)$$

2. Вычисляются коэффициенты прямой связи фильтра:

$$y(n) = v(n) - W_N^k \cdot v(n-1). \quad (4)$$

Таким образом, основные преимущества алгоритма Герцеля перед стандартным БПФ по основанию 2 при обнаружении отдельного тона заключаются в следующем:

- N может не быть целой степенью двух.
- Частота тона может быть любой в диапазоне от нуля до частоты дискретизации.
- Объем памяти коэффициентов фильтра меньше, чем объем поворачивающих множителей.
- Не требуется накопление блока данных до начала вычисления. Обработка может начинаться с приходом первого входного отсчета.
- Алгоритм Герцеля не требует бит-реверсивной сортировки.
- Если алгоритм Герцеля реализуется M раз для обнаружения M разных тонов, то он более эффективен, чем БПФ, при $M < \log_2 N$.
- При вычислении значения отсчета N-го ДПФ $X(m)$, вычисление выражения (3) выполняется N раз, в то время как выражение (4) – вычисляются только один раз при подаче на вход N-го входного отсчета. Для действительной входной последовательности $x(n)$ фильтр выполняет с целью вычисления $X(m)$ $N+2$ действительных умножения и $2N+1$ действительных сложений [4].

Одним из недостатков данного алгоритм является то, что он не позволяет вычислить большое количество компонент коэффициентов Фурье. И в задачах, когда необходимо рассчитать компоненты коэффициентов сразу для нескольких компонент, этот алгоритм будет не эффективен. Применение БПФ также не позволит уменьшить количество вычисляемых коэффициентов Фурье. В таких случаях предлагается использовать метод линейной алгебраической обработки сложных сигнальных конструкций.

2. Метод линейной алгебраической обработки сложных сигнальных конструкций

Применение алгоритма Герцеля и метода БПФ для вычисления параметров спектра сигналов является вычислительно затратным и сложно реализуемым. Для упрощения вычислений коэффициентов спектра сигналов предлагается использовать метод алгебраической демодуляции сложных сигнальных конструкций. Идея данного метода заключается в статистическом выявлении количества наблюдающихся фиксированных значений фаз гармонических колебаний на поднесущих частотах.

Для этого составляется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида:

$$A \cdot X = B, \quad (5)$$

где A – матрица амплитуд квадратурных компонент на интервале модуляции; B – вектор значений сигнала в цифровом представлении в каждом отсчете интервала модуляции; X – вектор искомых значений амплитуд для заданного интервала модуляции.

Размерность матрицы A определяется количеством отсчетов N, принимаемых во внимание при анализе сигнала на одном интервале модуляции, и числом учитываемых квадратур гармоник $(2 \cdot n_{f_{max}})$. В зависимости от соотношения вертикального и горизонтального размеров матрицы, система (5) может быть недоопределенной $(N < 2 \cdot n_{f_{max}})$, определенной $(N = 2 \cdot n_{f_{max}})$ или переопределенной $(N > 2 \cdot n_{f_{max}})$. Рассмотрим эти случаи подробнее.

Наиболее простым является случай, когда система (5) может быть строго определенной $(N = 2 \cdot n_{f_{max}})$, поскольку при этом, практически всегда, СЛАУ является совместной и решение системы существует и единственно. Число уравнений равняется числу искомых неизвестных $(2 \cdot n_{f_{max}})$, определяющих амплитуды квадратурных компонент сигнала. Для решения СЛАУ на i - м интервале модуляции следует выбрать $(2 \cdot n_{f_{max}})$ равномерно расположенных отсчетов массива измерений выборки $P = \{p_0, p_1, ...\}$, начиная с позиции начала наблюдения полного тактового интервала сигнала. Квадратная матрица коэффициентов при неизвестных СЛАУ формируется по следующему правилу:

$$A_1 = \left\| a_{i,j} \right\|, \quad i, j = 0, \ldots, \left(2 \cdot n_{f\,max} - 1\right);$$
$$a_{i,j} = \sin\left[2\pi(f_0 + q \cdot \Delta f) \cdot t_i\right], 0 \le j \le n_{f\,max} - 1; \qquad (6)$$
$$a_{i,j} = \cos\left[2\pi(f_0 + q \cdot \Delta f) \cdot t_i\right], n_f \le j \le 2 \cdot n_{f\,max} - 1;$$

где $q = 0, 1, ..., n_{f_{max}}$.

Вектор свободных членов формируется в виде вектора измерений сигнала на длительности одного интервала модуляции:

$$B_1 = \left\{ b_0, b_1, ..., b_{2n_{f_{max}}-1} \right\}, \; b_i = p_i, \qquad (7)$$

где $i = 0, ..., 2 \cdot n_{f_{max}} - 1$.

Решение нормально определенной СЛАУ

$$A_1 \cdot X_1 = B_1 \;\; \Rightarrow \;\; X_1 = A_1^{-1} \cdot B_1 \qquad (8)$$

дает искомую оценку вектора амплитуд квадратурных компонент $X_1 = \left\{ x_0^1, \ldots, x^1_{\left(2 \cdot n_{f\,max} - 1\right)} \right\}$, соответствующих допустимым значениям поднесущих частот.

Следующий случай, когда система (5) является недоопределенной $(N < 2 \cdot n_{f_{max}})$, при этом такие системы либо имеют бесконечное число решений, либо не имеют решения вовсе. Недоопределенная СЛАУ может быть решена методом псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза. Согласно методу псевдообратной матрицы, среди множества решений недоопределенной СЛАУ выбирается нормальное решение – решение с минимальной нормой среди решений, удовлетворяющее условию $\left\| X_1 \right\| = \min\limits_{X_1}$. Нормальное решение существует и является единственным и находится по формуле:

$$X_1 = A_1^{+} \cdot B_1, \qquad (9)$$

где A^{+} – псевдообратная матрица Мура-Пенроуза, размерностью $2 \cdot n_{f_{max}} \times 2 \cdot n_{f_{max}}$.

Матрица A^{+} определяется соотношением:

$$A_1 \cdot A_1^{+} \cdot A_1 = A_1 \qquad (10)$$

Решение (9), которое уместно записать в виде $X_1^{+} = A_1^{+} \cdot B_1$, дает нулевую невязку $\left\| A_1 \cdot X_1^{+} - B_1 \right\| = 0$, т.е. оно решение является псевдорешением и среди всех псевдорешений имеет, как нормальное решение, минимальную норму [5].

Наиболее выгодным с точки зрения максимального учета информации о сигнале является случай решения переопределенной СЛАУ $(N > 2 \cdot n_{f_{max}})$. Для формирования переопределенной СЛАУ используются дополнительные измерения сигнала из выборки P, содержащей большее количество уравнений при том же самом количестве неизвестных. Степень переопределения системы характеризуется коэффициентом $\mu = W/2$ и описывает асимметрию размеров матрицы $W \times 2$. Здесь $W = \lfloor Fd/V \rfloor$, где Fd - частота дискретизации сигнала; V - скорость модуляции; знак $\lfloor \cdot \rfloor$ – означает округление к ближайшему меньшему целому числу; число 2 означает количество используемых квадратурных компонент, с помощью которых задается сигнал, а, следовательно, количество искомых неизвестных. Матрица A_2 и вектор B_2 формируется, используя максимальное количество измерений на интервале модуляции длительностью T_p, определяемое величиной $Num \approx T_p / t_d$:

$$A_2 = \left\| a_{i,j} \right\|, i = 0, \ldots, (Num - 1), \; j = 0 ... \left(2 \cdot n_{f\,max} - 1\right);$$
$$a_{i,j} = \sin\left[2\pi(f_0 + q \cdot \Delta f) \cdot t_i\right], \quad 0 \le j \le n_{f\,max} - 1; \qquad (11)$$
$$a_{i,j} = \cos\left[2\pi(f_0 + q \cdot \Delta f) \cdot t_i\right], n_f \le j \le 2 \cdot n_{f\,max} - 1;$$

$$B_2 = \left\{ b_0, \ldots, b_{\left(Num - 1\right)} \right\}, \quad b_v = q_v, \qquad (12)$$
$$v = 0, \ldots, \left(Num - 1\right).$$

СЛАУ имеет вид:

$$A_2 \cdot X_2 = B_2 . \qquad (13)$$

Система (13) имеет множество решений. На практике наиболее часто используют критерий наименьших квадратов, приводящему к оценке вида:

$$X_2^{*} = (A_2{}^{T} \cdot A_2)^{-1} A_2{}^{T} \cdot B_2 . \qquad (14)$$

Решение системы (14) является приближенным, но результат получается более точным, чем при решении строгой системы (8). Помехоустойчивость решения достигается путем усреднения действия помех при числе измерений сигнала, превышающим минимальное необходимое.

Вычисление вектора фазовых углов посредством решения системы (14) методом алгебраической обработки сложных сигнальных конструкций требует примерно такого же количества операций, как и при использовании метода БПФ. При размерности матрицы A_2, равной $Num \times 2$, количество операций, требуемых для решения системы (14), примерно равно $Num \cdot \log_2 Num$. Главная особенность данного метода заключается в том, что для вычисления параметров спектра сигналов выбранной номенклатуры частот, нет необходимости вычислять все параметры спектра сигналов.

Наконец, можно рассмотреть важный для практики случай, когда СЛАУ является слабо определенной. Слабо определенная система – это система, описываемая матрицей A с определителем не равным нулю $|A| \approx 0$, но число обусловленности $|A^{-1}| \cdot |A|$ очень велико. Поскольку некоторые уравнения, входящие в такую систему, представляются линейной комбинацией других уравнений, то фактически сама система является недоопределенной $(N < 2 \cdot n_{f_{max}})$. В зависимости от конкретного вида вектора правой части B, существует либо бесконечное множество решений, либо не существует ни одного. Для решения такого вида систем используется метод регуляризации. Данный метод основан на привлечении дополнительной априорной информации о решении, которая может быть как качественной, так и количественной. Концепция регуляризации сводится к замене решения СЛАУ вида (5) на задачу о минимизации функционала Тихонова:

$$\Omega(X, \lambda) = |A \cdot X - B|^2 + \lambda \cdot |X - x0|^2, \qquad (15)$$

где λ – малый положительный параметр регуляризации: $x0$ – вектор априорной оценки.

Задачу минимизации функционала Тихонова можно свести к решению другой СЛАУ:

$$(A^T \cdot A + \lambda \cdot I) \cdot X = A^T \cdot B + \lambda \cdot x0, \qquad (16)$$

которая при $\lambda \to 0$ переходит в исходную слабо определенную систему, а при больших λ, будучи хорошо определенной, имеет решение $x0$. Очевидно, оптимальным будет некоторое промежуточное значение λ, устанавливающее определенный компромисс между приемлемой обусловленностью и близостью к исходной задаче [6].

Метод алгебраической обработки сложных сигнальных конструкций позволяет произвести демодуляцию сигнала путем решения СЛАУ без использования метода БПФ. При демодуляции сигнала данным методом необходимо, чтоб СЛАУ была переопределенной, так как именно переопределенная СЛАУ позволяет максимально учитывать информацию о сигнале и дает единственное решение системы. За счет переопределения СЛАУ и достигается помехоустойчивость данного решения, путем усреднения действия помех при большом числе измерений сигнала. Применение данного метода при демодуляции сигналов позволит вычислять параметры спектра сигналов только нужной номенклатуры частот.

Выводы

При обработке сложных сигнальных конструкций для вычисления параметров спектра нескольких десятков тонов при применении алгоритма БПФ решается чрезмерно избыточная задача, при использовании алгоритма Герцеля, который реализуется в форме БИХ-фильтра второго порядка, эффективность алгоритма сводится к вычислительной сложности БПФ. Для эффективного решения данной задачи предлагается применять метод алгебраической обработки сложных сигнальных конструкций, который позволит вычислять параметры спектра сигналов только нужно номенклатуры, путем решение СЛАУ без использования БПФ.

Список литературы

1. *Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов / В.И. Тихонов.– М.: Радио и связь, 1983.– 320 с.*
2. *Феер К. Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра / К. Феер; пер. с англ. под ред. В.И. Журавлева. – М.: Радио и связь, 2000. – 520 с.*
3. *Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов / Р. Блейхут; пер. с англ. под ред. И.И. Грушко. - М.: Мир, 1989. - 448 с.*
4. *Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов / Р. Лайонс; пер. с англ. - М.: Бином, 2006. - 635 с.*
5. *Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд; пер. с англ. Ю.Н. Александрова. – М.: Мир, 1978. – 834 с.*
6. *Теория электрической связи: учебное пособие / К.К. Васильев, В.А. Глушков, А.В. Дормидонтов, А.Г. Нестеренко. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 452 с..*

Надійшла до редколегії 22.04.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.А. Краснобаев, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ АЛГОРИТМА ГЕРЦЕЛЯ ТА СПОСОБУ АЛГЕБРАЇЧНОЇ ОБРОБКИ СКЛАДНИХ СИГНАЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ВИЯВЛЕННІ ОКРЕМИХ ТОНІВ СИГНАЛА

С.Г. Веклич

Розглянуто алгоритм селективного спектрального аналізу, запропонований спосіб лінійної алгебраїчної обробки складних сигнальних конструкцій при виявленні окремих тонів в спектрі сигналу. Зроблено аналіз ефективності відомого і запропонованого способу селективного спектрального аналізу.

Ключові слова: *швидке перетворення Фур'є (ШПФ), рекурсивний фільтр (НІХ-фільтри), система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), цифрова обробка сигналів.*

THE COMPARATIVE ANALYSIS OF THE GOERTZEL ALGORITHM AND METHOD OF ALGEBRAIC PROCESSING OF COMPLEX SIGNAL CONSTRUCTIONS IN CASE OF DETECTION OF SEPARATE TONES OF THE SIGNAL

S.H. Veklych

The Goertzel algorithm of selective spectrum analysis is considered, the method of the linear algebraic processing of difficult signal constructions in case of detection of separate tones in a signal range is offered. The analysis of efficiency of the known and offered method of selective spectrum analysis is made.

Keywords: *fast Fourier transform (FFT), filter with infinite impulse response (IIR-filters), system of linear algebraic equations (SLAE), digital signal processing.*