

М. В. Савченко, М. В. Шиман

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна

## МЕТОД АНАЛІЗУ ЗАВАНТАЖЕННЯ ВУЗЛІВ КЛАСТЕРУ MESH-МЕРЕЖІ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ МЕРЕЖ ДЖЕКСОНА

**Анотація.** У статті представлено метод аналізу завантаження кластеру вузлів у MESH-мережах на основі математичного апарату мереж Джексона. Розглянуто математичну модель, що описує взаємодію вузлів у кластері, зокрема їхню здатність обробляти вхідний трафік та перерозподіляти потоки між собою. Модель враховує ймовірності переходу заявок між вузлами, швидкість обслуговування кожного вузла та зовнішній вхідний трафік. Основну увагу приділено аналізу завантаження вузлів та умовам стабільності системи. Проведено розрахунок коефіцієнтів завантаження вузлів, ймовірності відсутності заявок, а також середньої кількості заявок у кожному вузлі. Показано, що для забезпечення стабільної роботи системи необхідно, щоб коефіцієнт завантаження кожного вузла був меншим за одиницю. Визначено вплив параметрів системи, таких як інтенсивність вхідного трафіку та швидкість обслуговування, на продуктивність кластеру. Запропонований підхід є ефективним інструментом для оптимізації MESH-мереж, оскільки дозволяє ідентифікувати вузли з критичним навантаженням та оцінити стабільність системи в цілому. Модель може бути використана для проектування нових мереж та вдосконалення існуючих, особливо в умовах різномірного трафіку та динамічних змін параметрів системи.

**Ключові слова:** мережа Джексона, кластер, математична модель, MESH-мережа, трафік.

### Вступ

**Актуальність дослідження.** MESH-мережі є однією з найважливіших технологій сучасних телекомунікаційних систем, які знаходять широке застосування у бездротових мережах, сенсорних системах та інтернеті речей. Завдяки їхній адаптивній структурі та високій гнучкості вони дозволяють створювати розподілені та самовідновлювальні мережі, здатні ефективно функціонувати навіть за умов втрати окремих вузлів. Однак у таких мережах виникають складні задачі аналізу та оптимізації трафіку, оскільки взаємодія вузлів кластеру супроводжується нерівномірним завантаженням і перерозподілом заявок, що може призводити до перевантаження окремих елементів системи.

Актуальність дослідження полягає в необхідності розробки ефективних методів моделювання та аналізу завантаження вузлів у MESH-мережах для забезпечення їхньої стабільності та продуктивності. Одним із перспективних підходів є застосування математичного апарату мереж Джексона, який дозволяє моделювати складні системи черг із взаємодіючими вузлами та оцінювати ключові характеристики, такі як коефіцієнт завантаження, середній час перебування заявок та ймовірність їх втрат. Такий підхід забезпечує можливість адаптації мережі до змін у трафіку та оптимізації її роботи.

У статті пропонується метод аналізу завантаження кластеру вузлів у MESH-мережах на основі мереж Джексона. Дослідження спрямоване на оцінку стабільності системи, виявлення вузлів із критичним навантаженням та визначення умов, за яких система залишається ефективною. Запропонований підхід може бути застосований для оптимізації існуючих MESH-мереж, планування нових систем та розробки інструментів для автоматичного управління трафіком у розподілених мережах.

**Мета та задачі дослідження.** Метою статті є розробка методу аналізу завантаження кластеру вуз-

лів у MESH-мережах на основі математичного апарату мереж Джексона, що дозволяє оцінювати стабільність системи, виявляти критично завантажені вузли та оптимізувати розподіл трафіку. Дослідження спрямоване на удосконалення методів моделювання телекомунікаційних систем з метою підвищення їх продуктивності та адаптивності в умовах змінних характеристик трафіку.

Одним із завдань є побудова математичної моделі, яка описує взаємодію вузлів кластеру, враховуючи зовнішній трафік, швидкість обслуговування заявок та ймовірності переходу між вузлами. Така модель має відображати основні характеристики системи черг та дозволити проводити аналіз її параметрів, таких як коефіцієнти завантаження вузлів, середня кількість заявок та ймовірність відсутності заявок у кожному вузлі.

Наступним завданням є дослідження умов стабільності системи на основі розрахунку коефіцієнтів завантаження вузлів. Важливо визначити критичні значення параметрів, при яких система залишається у стабільному режимі роботи, а також оцінити вплив змін зовнішнього трафіку та швидкості обслуговування на продуктивність кластеру.

Ще однією важливою задачею є виявлення вузлів із критичним навантаженням та розробка рекомендацій щодо їхнього розвантаження. Це передбачає аналіз можливих шляхів оптимізації, таких як зміна розподілу трафіку, збільшення швидкості обслуговування або перерозподіл заявок між вузлами.

Останнім завданням є застосування отриманих результатів для практичної оптимізації MESH-мереж, зокрема, їхнього планування, управління трафіком та розробки адаптивних рішень для роботи в умовах різномірного трафіку. Результати дослідження можуть бути використані як інструмент для підвищення ефективності існуючих мереж та вдосконалення їхньої архітектури.

**Огляд літератури.** У сучасних дослідженнях моделювання завантаження вузлів MESH-мереж із

використанням мереж Джексона привертає значну увагу. Зокрема, у статті [1] автори досліджують середній вік інформації в мережах Джексона з обмеженим розміром буфера. Перевагою цього підходу є можливість оцінки ефективності інформаційних систем, однак обмеженням є складність у застосуванні до великих мереж через обмеження буферів.

Інше дослідження, представлене у статті [2], аналізує узагальнені мережі Джексона з урахуванням можливих відмов. Перевагою є здатність моделі враховувати різні режими відмов та стратегії відновлення, проте недоліком є складність у застосуванні до реальних мереж через необхідність точного визначення параметрів відмов.

У книзі [3] автори детально розглядають теоретичні основи та практичні аспекти віку інформації в мережах, що дозволяє глибше зрозуміти динаміку оновлення даних у складних системах. Перевагою є комплексний підхід до аналізу.

Підхід на основі мереж Джексона має суттєві переваги порівняно з класичними марківськими

моделями [4, 5], зокрема в контексті моделювання завантаження вузлів у складних системах, таких як MESH-мережі.

На відміну від марківських моделей, які переважно орієнтовані на аналіз станів окремих вузлів з безпам'ятністю, мережі Джексона дозволяють моделювати взаємодію множинних вузлів і враховувати перерозподіл трафіку між ними. Це забезпечує більш реалістичне відображення динаміки системи, особливо для розподілених і адаптивних мереж. Проте мережі Джексона мають вищу обчислювальну складність і вимагають точного визначення ймовірностей переходів між вузлами, що може бути викликом для великих і гетерогенних систем.

## Результати досліджень

**1. Математична модель кластеру мережі з трьома вузлами.** Побудуємо математичну модель частини MESH-мережі з трьома вузлами, де вузли взаємопов'язані, використовуючи математичний апарат мереж Джексона (рис. 1).

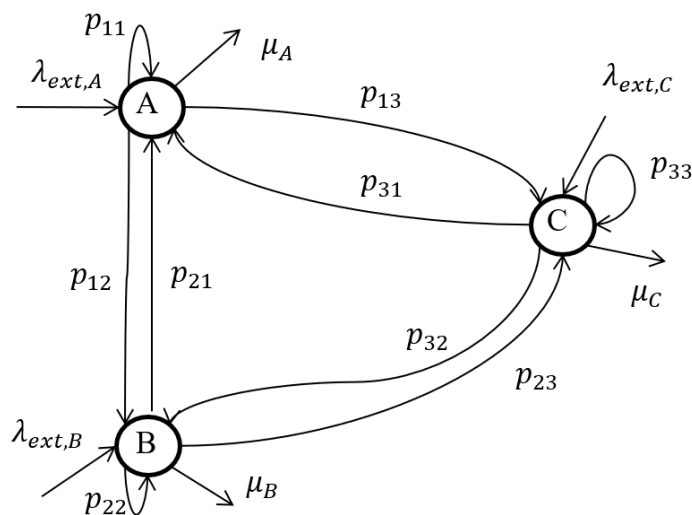


Рис. 1. Модель мережі з трьома вузлами

Опишемо структуру мережі за допомогою стандартних позначень теорії графів. Є три вузли A, B, C, які можуть обмінюватися трафіком один з одним та з зовнішнім середовищем (іншими вузлами великої мережі, які не потрапили у кластер, що розглядається).

Між вузлами встановлені ймовірності переходів  $p_{ij}$ , де  $i, j$  — індекси вузлів.

У свою чергу задано наступні параметри системи, інтенсивність зовнішнього потоку для кожного вузла  $\lambda_{ext,i}$  для  $i = A, B, C$ , швидкість обслуговування заявок у кожному вузлі  $\mu_i$  для  $i = A, B, C$ , матриця ймовірностей переходу між вузлами  $P = \{p_{ij}\}$ , де  $p_{ij}$  — ймовірність переходу заявки з вузла  $i$  до  $j$ .

Використаємо рівняння потокового балансу. Для кожного вузла сума вхідних потоків дорівнює сумі оброблених та переданих потоків. Запишемо це співвідношення.

$$\lambda_i = \lambda_{ext,i} + \sum_{j \neq i} \lambda_j p_{ji}, \quad (1)$$

де  $\lambda_i$  — сумарна інтенсивність потоку, що обробляється вузлом  $i$ .

Отримана система рівнянь для потоків  $\lambda_i$  вирішується, враховуючи матрицю переходів  $P$ .

**2. Аналіз показників якості обслуговування у вузлах мережі на базі запропонованої моделі.** Побудуємо модель кластеру мережі з трьома вузлами. Інтенсивність потоку пакетів, що надходять до цих вузлів відповідно

$$\lambda_{ext,A} = 5, \lambda_{ext,B} = 3, \lambda_{ext,C} = 2.$$

У свою чергу швидкість обслуговування кожного вузла дорівнює  $\mu_A = 25$ ,  $\mu_B = 20$ ,  $\mu_C = 15$ , а матриця переходів задана співвідношенням

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де діагональні елементи  $p_{ii} = 0$ , оскільки вузол не пересилає пакети сам собі.

Складемо систему рівнянь для потоків:

$$\begin{aligned}\lambda_A &= \lambda_{ext,A} + \lambda_B p_{BA} + \lambda_C p_{CA}, \\ \lambda_B &= \lambda_{ext,B} + \lambda_A p_{AB} + \lambda_C p_{CB}, \\ \lambda_C &= \lambda_{ext,C} + \lambda_A p_{AC} + \lambda_B p_{BC}.\end{aligned}\quad (3)$$

Підставимо у (3) значення матриці  $P$  з (2), отримуємо наступне співвідношення:

$$\begin{aligned}\lambda_A &= 5 + 0.4\lambda_B + 0.3\lambda_C, \\ \lambda_B &= 3 + 0.3\lambda_A + 0.5\lambda_C, \\ \lambda_C &= 2 + 0.2\lambda_A + 0.3\lambda_B.\end{aligned}\quad (4)$$

Для відшукування  $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$  система рівнянь розв'язується за допомогою чисельних методів або підставлення.

В результаті отримано інтенсивності оброблюваного потоку у вузлах:

вузол  $A$ :  $\lambda_A = 11.14$  ;

вузол  $B$ :  $\lambda_B = 9.95$  ;

вузол  $C$ :  $\lambda_C = 7.21$  .

Розрахуємо коефіцієнти завантаження вузлів за формулою

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}, \quad (5)$$

де маємо такі характеристики вузлів:

вузол  $A$ :  $\rho_A = 0.45$  ;

вузол  $B$ :  $\rho_B = 0.50$  ;

вузол  $C$ :  $\rho_C = 0.48$  .

Отриманий кластер MESH-мережі було представлено у вигляді спрощеної мережі Джексона (рис. 2), що дозволило здійснити аналіз завантаження вузлів та оцінити стабільність системи.

Використання математичного апарату мереж Джексона забезпечило можливість розрахунку інтенсивності потоків у кожному вузлі, коефіцієнтів їх завантаження, а також середньої кількості заявок та часу їх обслуговування.

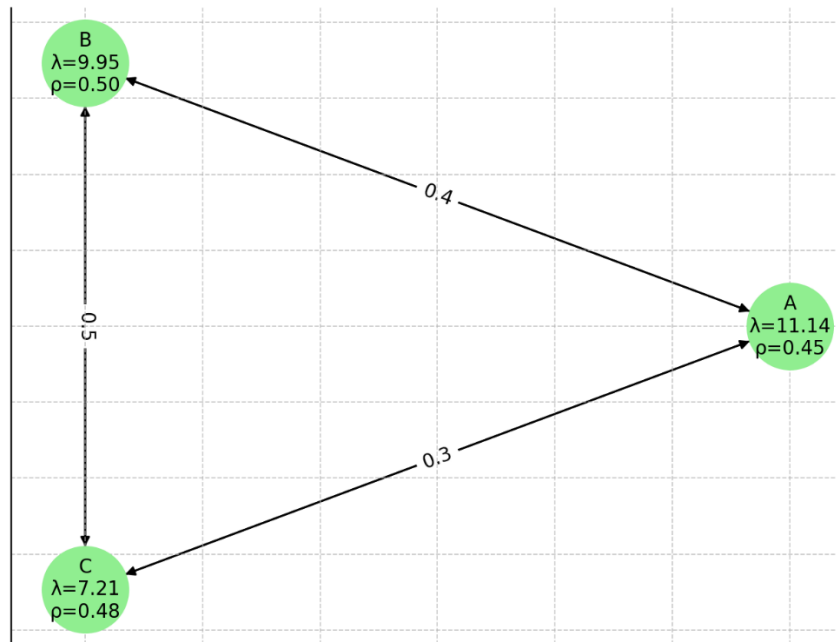


Рис. 2. Кластер MESH-мережі, представлений у вигляді спрощеної мережі Джексона

Це дозволило виявити вузли з критичним навантаженням, що є ключовим для оптимізації ресурсів мережі та підвищення її продуктивності.

Результати підтвердили ефективність запропонованого підходу для аналізу розподілених систем із різномірним трафіком.

**3. Аналіз загальних показників якості обслуговування у кластері.** Отримані коефіцієнти завантаження  $\rho_i$  для всіх вузлів менше за одиницю, що означає, що система працює у стабільному режимі.

Це забезпечує стаціонарність системи, а ймовірність того, що вузли вільні є більшою за нуль. Для кожного вузла визначається ймовірність  $P_0(i)$ , того, що у вузлі немає заявок:

$$P_0(i) = (1 - \rho_i). \quad (6)$$

Середня кількість заявок у кожному вузлі  $L_i$

розраховується за формулою:

$$L_i = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i}. \quad (7)$$

Середній час перебування заявки у черзі та обслуговуванні у вузлі (ping)  $W_i$  обчислюється за співвідношенням:

$$W_i = \frac{1}{\mu_i(1 - \rho_i)}. \quad (8)$$

Середній час перебування заявки у всій мережі Джексона розраховується за формулою Літтла:

$$W_{system} = \frac{\sum_{i=1}^3 L_i}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i}. \quad (9)$$

Результати розрахунків параметрів для кожного вузла  $A, B, C$  за формулами (6) – (9) наведено у табл. 1, а інтегральний показник  $W_{system} = 0.096$ .

Таблиця 1 – Розрахунок показників системи

| Вузол | $\lambda_i$ | $\rho_i$ | $P_0$  | $L_i$  | $W_i$  |
|-------|-------------|----------|--------|--------|--------|
| A     | 11.1442     | 0.4457   | 0.5542 | 0.8043 | 0.0721 |
| B     | 9.9502      | 0.4975   | 0.5024 | 0.9901 | 0.0995 |
| C     | 7.2139      | 0.4809   | 0.5190 | 0.9265 | 0.1284 |

### Висновки

У цій роботі було запропоновано метод аналізу завантаження кластеру вузлів у MESH-мережах на основі математичного апарату мереж Джексона. Побудована модель дозволила оцінити ключові параметри роботи мережі, включаючи інтенсивність трафіку, коефіцієнти завантаження вузлів, середню кількість заявок і час їх перебування у вузлах. Це дало можливість визначити умови стабільної роботи системи та виявити вузли з критичним навантаженням.

Результати дослідження підтвердили ефективність запропонованого підходу для аналізу MESH-мереж, особливо в умовах динамічних змін трафіку та неоднорідного навантаження. Використання мереж Джексона забезпечує гнучкість у моделюванні складних розподілених систем, а також дозволяє здійснювати оптимізацію ресурсів і перерозподіл трафіку для досягнення максимальної продуктивності мережі.

Отримані результати можуть бути використані для вдосконалення існуючих MESH-мереж, плану-

вання нових систем та розробки алгоритмів управління трафіком у реальному часі. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розширення моделі з урахуванням більш складних типів трафіку, відмов вузлів та інших факторів, які впливають на роботу мережі в реальних умовах.

Запропонований метод аналізу завантаження кластеру вузлів у MESH-мережах може бути практично впроваджений у процесах проєктування і оптимізації телекомунікаційних систем. Модель на основі мереж Джексона дозволяє ідентифікувати вузли з критичним навантаженням та прогнозувати їхній стан за умов змінного трафіку. Це може бути використано для побудови автоматизованих систем моніторингу та управління мережами, які забезпечуватимуть балансування навантаження у реальному часі.

Окрім того, результати дослідження можуть знайти застосування у сфері IoT-мереж, де необхідно забезпечити стабільну передачу даних між великою кількістю пристроїв. Інтеграція моделі в системи управління дозволить покращити ефективність використання ресурсів мережі, мінімізувати затримки передачі інформації та уникати перевантаження вузлів.

Це особливо актуально для критично важливих застосувань, таких як системи розумного міста, інфраструктура безпеки та сенсорні мережі для моніторингу.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Doncel, J., & Assaad, M. (2021). Age of Information of Jackson Networks with Finite Buffer Size. *IEEE Wireless Communications Letters*, 10(4), 902-906. DOI: 10.1109/LWC.2021.3052811.
2. Sommer, J., Berkhout, J., Daduna, H., & Heidergott, B. (2017). Analysis of Jackson Networks with Infinite Supply and Unreliable Nodes. *Queueing Systems*, 87(1-2), 181-207. DOI: 10.1007/s11134-017-9542-1.
3. Sun, Y., Uysal, E., & Dhillon, H. S. (2023). *Age of Information*. Cambridge University Press. DOI: 10.1017/9781108943321.
4. Pustovoitov, P. Assessment of QoS indicators of a network with UDP and TCP traffic under a node peak load mode. / Pustovoitov, P., Voronets, V., Voronets, O., Sokol, H., Okhrymenko, M. // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2024. V 1. № 4(127). P. 23-31.
5. Пустовойтов П.С. Модель вузла електронної комунікації, що обслуговує tcp-трафік / Воронець В.М., Пустовойтов П.С. // *Системи управління, навігації та зв'язку*. Полтава, 2023. № 4(74). С. 152-155. (Б).

Received (Надійшла) 18.11.2024

Accepted for publication (Прийнята до друку) 22.01.2025

### Method for analyzing the load of MESH-network cluster nodes based on the mathematical model of Jackson networks

Mykola Savchenko, Maksym Shyman

**Abstract.** The article presents a method for analyzing the load of a cluster of nodes in MESH-networks based on the mathematical apparatus of Jackson networks. A mathematical model is considered that describes the interaction of nodes in the cluster. In particular, the model describes their ability to process incoming traffic and redistribute flows among themselves. The model takes into account the probabilities of application transition between nodes, the service speed of each node, and external incoming traffic. The main attention is paid to the analysis of the node load and the conditions of system stability. The calculation of the node load coefficients and the probability of the absence of applications is carried out. The average number of applications in each node is also calculated. It is shown that to ensure stable operation of the system, it is necessary that the load coefficient of each node be less than one. The influence of system parameters, such as the intensity of incoming traffic and the speed of service, on the performance of the cluster is determined. The proposed approach is an effective tool for optimizing MESH networks, as it allows you to identify nodes with critical loads and assess the stability of the system as a whole. The model can be used to design new networks and improve existing ones. The model will be especially useful in conditions of heterogeneous traffic and dynamic changes in system parameters.

**Keywords:** Jackson network, cluster, mathematical model, MESH network, traffic.