

А. С. Янко<sup>1</sup>, В. А. Краснобаєв<sup>2</sup>, П. С. Сабельнікова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Національний університет «Полтавська політехніка ім. Ю.Кондратюка», Полтава, Україна

<sup>2</sup> Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НАДІЙНОСТІ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ, ФУНКЦІОНУЮЧИХ В МОДУЛЯРНІЙ СИСТЕМІ ЧИСЛЕННЯ ПО ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ ПРИНЦИПУ ПАСИВНОЇ ВІДМОВОСТІЙКОСТІ

**Анотація.** Проведений аналіз стану та перспектив розвитку сучасних комп'ютерних систем (КС) показав, що проблема підвищення відмовостійкості, що є основою надійності, не може бути ефективно вирішена по основі використання традиційної двійкової позиційної системи числення без погіршення інших техніко-економічних показників КС. Отримані в результаті проведених досліджень та попередні позитивні результати показують перспективність використання модулярної системи числення (МСЧ) для підвищення відмовостійкості і надійності КС. Як основний показник для оцінки надійності функціонування КС запропоновано використовувати можливість безвідмовної роботи. З використанням формалізованої моделі відмовостійкості КС була досліджена та отримана математична модель надійності КС, функціонуючих в МСЧ, на основі використання принципу пасивної відмовостійкості. Дослідження моделі показало, що зі збільшенням кратності резервування надійність КС у МСЧ (з двома контрольними основами) підвищується до 25% порівняно з потроєною КС, яка використовує двійкову позиційну систему числення.

**Ключові слова:** ймовірність безвідмовної роботи, математична модель, модулярна система числення, надійнісна модель, комп'ютерна система, пасивна відмовостійкість.

### Вступ

Аналіз методів і алгоритмів вирішення завдань обробки інформації системами, функціонуючими у позиційній системі числення, показав, що на сучасному рівні розвитку інформаційних технологій застосування таких систем не може повністю забезпечити виконання зростаючих вимог щодо надійності, висунуті до комп'ютерних систем (КС). Внаслідок цього виникає завдання пошуку перспективних шляхів удосконалення КС, одним із яких є використання нетрадиційних систем числення адаптивних до класу завдань, які вирішуються КС. Як показали дослідження в цьому напрямку, однією з таких систем числення може бути непозиційна модулярна система числення (МСЧ) [1]. Обґрунтуємо можливість використання МСЧ для створення надійних та відмовостійких КС.

Розробка математичної моделі відмовостійкості функціонування КС у МСЧ, що дозволяє визначити та розробити методи підвищення відмовостійкості КС, без зниження продуктивності обробки інформації та синтезувати відмовостійкі структури, що дозволяють досягти максимального значення відмовостійкості КС за умови виконання заданих обмежень. Необхідно відзначити, що під відмовами КС в МСЧ будуть розумітися як несправність обладнання (елементів та компонент КС) так і збої в роботі трактів обробки інформації (ТОІ), що ведуть до появи помилок та спотворення інформації.

**Метою статті** є розробка математичної моделі надійності функціонування КС у МСЧ по основі використання принципу пасивної відмовостійкості.

### Структурна схема надійнісної моделі КС в МСЧ

Збільшення надійності КС, функціонуючої в МСЧ, засноване на використанні пасивної адаптації (без перебудови структури КС у процесі функціону-

вання), передбачає реалізацію сукупності методів, алгоритмів, дій та операцій, спрямованих на забезпечення відмовостійкості КС.

Як основний показник для оцінки надійності функціонування КС запропоновано використовувати ймовірність безвідмовної роботи  $P(t)$ .

Виходячи з властивостей МСЧ (незалежності, малорозрядності та рівноправності залишків) [2] ймовірність безвідмовної роботи КС в МСЧ можна представити як ймовірність безвідмовної роботи КС у ПСЧ для випадку ковзного резервування з навантаженим резервом (рис. 1).

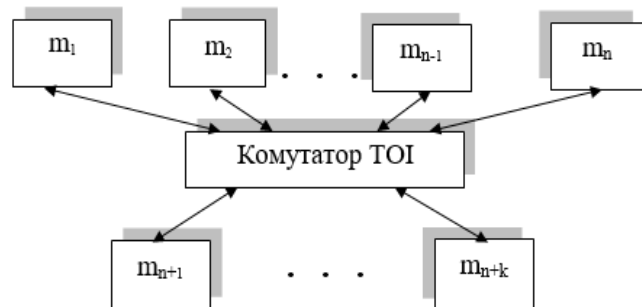


Рис. 1. Структурна схема надійності КС в МСЧ

Дійсно, по-перше, будь-який інформаційний ТОІ КС, що відмовив, по основі  $m_i$  ( $i = l, n$ ) може бути замінений на будь-який справний контрольний ТОІ КС по основі

$$m_j \left( j = \overline{n+l, n+k} \right); m_i < m_j,$$

де  $n$  і  $k$  – відповідно кількість інформаційних та контрольних основ МСЧ; по-друге, всі тракти КС, як інформаційні, так і контрольні, одночасно, незалежно й однаково беруть участь у обробці інформації.

Подана на рис. 1 структурна схема, відповідає надійнісній моделі КС в МСЧ з  $n$  інформаційними і

$k$  контрольними незалежними трактами. Комутатор здійснює контроль функціонування ТОІ і перемикає трактив, що відмовили на працездатні. Розглянемо, як, використовуючи запропоновану надійнісну модель, можна розрахувати ймовірність безвідмовної роботи КС в МСЧ.

Нехай задана впорядкована  $(m_i < m_i + 1)$  МСЧ набором взаємно попарно простих чисел  $m_1, m_2, \dots, m_n, m_{n+1}, \dots, m_{n+k}$ , де  $n$  і  $k$  відповідно кількість інформаційних та контрольних основ, а кратність МСЧ визначиться величиною  $k/n$ .

У цьому випадку формула для визначення ймовірності безвідмовної роботи КС у МСЧ набуде вигляду виразу:

$$P_{МСЧ}^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^k C_{k+n}^i P_1^{k+n-i}(t) \sum_{j=0}^i (-1)^j C_i^j P_1^j(t), \quad (1)$$

де  $P_1(t) = e^{-\lambda_{ТОІ}t}$  – ймовірність безвідмовної роботи ТОІ з найбільшої (найменш надійної) основи  $m_{n+k}$  МСЧ;  $\lambda_{ТОІ}$  – інтенсивність відмов обладнання ТОІ в МСЧ з найбільшої основи  $m_{n+k}$ .

Співвідношення (1) може бути використане для розрахунку ймовірності безвідмовної роботи КС у МСЧ при наступних припущеннях:

- відмови трактив КС підпорядковані експоненціальному розподілу;
- комутуючий пристрій ідеальний (тобто ймовірність безвідмовності роботи комутатора дорівнює одиниці);
- інформаційні (ІТОІ) та контрольні трактив обробки інформації (КТОІ) КС рівнонадійні, тобто ймовірність безвідмовної роботи всіх трактив КС приймається рівною ймовірності безвідмовної роботи  $P_1(t)$  тракту КС за найбільшої основи МСЧ  $m_{n+k}$ , що має найменшу ймовірність безвідмовної роботи [4];

– не враховується можливість відновлення трактив КС, що відмовили, в МСЧ.

Зазначимо, що реальна надійність КС у МСЧ буде вищою, ніж та, що визначається співвідношенням (1), оскільки дана формула не враховує можливість заміни одним контрольним трактом по основі  $m_j$  одного або одночасно кількох непрацездатних інформаційних трактив за умови:

$$m_j \geq \prod_{i=1}^q m_{k_i}, \quad (2)$$

де  $q$  – максимальна кількість робочих трактив, що одночасно замінюються, одним контрольним працездатним трактом по основі  $m_j$ .

Проведемо порівняльний аналіз надійності потроєної позиційної КС з ідеальним мажоритарним елементом та КС у МСЧ з ідеальним комутатором з безвідмовності, застосовуючи розглянуту надійнісну модель. Позначимо через  $\lambda_l$  інтенсивність відмов обладнання, віднесена до одного двійкового розряду (до одиниці розрядної сітки КС) [5]. В цьому випад-

ку ймовірність безвідмовної роботи обладнання, віднесена до одного двійкового розряду дорівнює:

$$P_l(t) = e^{-\lambda_l t}. \quad (3)$$

Для позиційної  $l$ -байтової КС ймовірність безвідмовної роботи дорівнює:

$$P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}, \quad (4)$$

де  $\lambda_0 = 8l\lambda_l$ .

Відомо, що ймовірність безвідмовної роботи для потроєної мажоритарної структури, що містить три КС та ідеальний мажоритарний елемент, дорівнює [3]:

$$P_M(t) = 3P_0^2(t) - 2P_0^3(t) = e^{-16\lambda_l t} (3 - 2e^{-8\lambda_l t}). \quad (5)$$

Для КС в МСЧ ймовірність безвідмовної роботи тракту обробки інформації з довільної основи  $m_i (i = \overline{1, n+k})$  визначається як:

$$P_i(t) = e^{-\lambda_{ТОІ} t} \quad (6)$$

або

$$P_1(t) = e^{-\lambda_l \omega_{n+k} t}, \quad (7)$$

де

$$\omega_{n+k} = [\log_2(m_{n+k} - 1)] + 1.$$

Ймовірність безвідмовної роботи КС у МСЧ визначається відповідно до виразу (1).

Нехай  $l=1$  (однобайтова КС) і  $k=1$ . Тоді з урахуванням критерію мінімальності апаратної надмірності КС МСЧ можна подати у вигляді набору наступних основ

$$m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = 5, m_4 = 7, m_5 = 11.$$

При цьому:

$$\prod_{i=1}^4 m_i = 420 > 2^8 = 256, \quad (8)$$

та найбільший спільний дільник (НСД)  $(m_i, m_j) = 1$  для  $i \neq j$ . В цьому випадку співвідношення (1) запишемо у вигляді:

$$P_{МСЧ}^{(1)}(t) = 5P_1^4(t) - 4P_1^5(t) = e^{-16\lambda_l t} (5 - 4e^{-4\lambda_l t}). \quad (9)$$

Позначимо  $\lambda^* = 8\lambda_l$ . При цьому вирази (5) і (9) можна записати:

$$P_M(t) = e^{-2\lambda^* t} (3 - 2e^{-\lambda^* t}). \quad (10)$$

$$P_{МСЧ}^{(1)}(t) = e^{-2\lambda^* t} (5 - 4e^{-0.5\lambda^* t}). \quad (11)$$

У таблиці 1 вміщено значення ймовірності безвідмовної роботи:

$$P(t) = e^{-\lambda^* t} \quad (12)$$

для нерезервованої однобайтової позиційної КС (I).

Також відповідно до виразів (10) і (11) КС (II), для КС у МСЧ з однією контрольною основою (III) та для КС у модулярній системі числення з двома контрольними основами (IV).

Відповідно до даних табл. 1 на рис. 2 представлені графіки залежностей

$$P(t) = F(*t)$$

для однобайтової: нерезервованої (I), триканальної резервованої (II) у позиційній системі числення (ПСЧ) та комп'ютерна система у модулярній системі числення (III) з параметрами  $l = 1, n = 2, k = 1$  і графік залежності для  $k = 2$  (IV).

З даного графіка видно, що комп'ютерна система в модулярній системі числення з двома контрольними основами надійніше потроєної позиційної системи (II) і надійніше комп'ютерна система модулярної системи числення з однією контрольною основою (III).

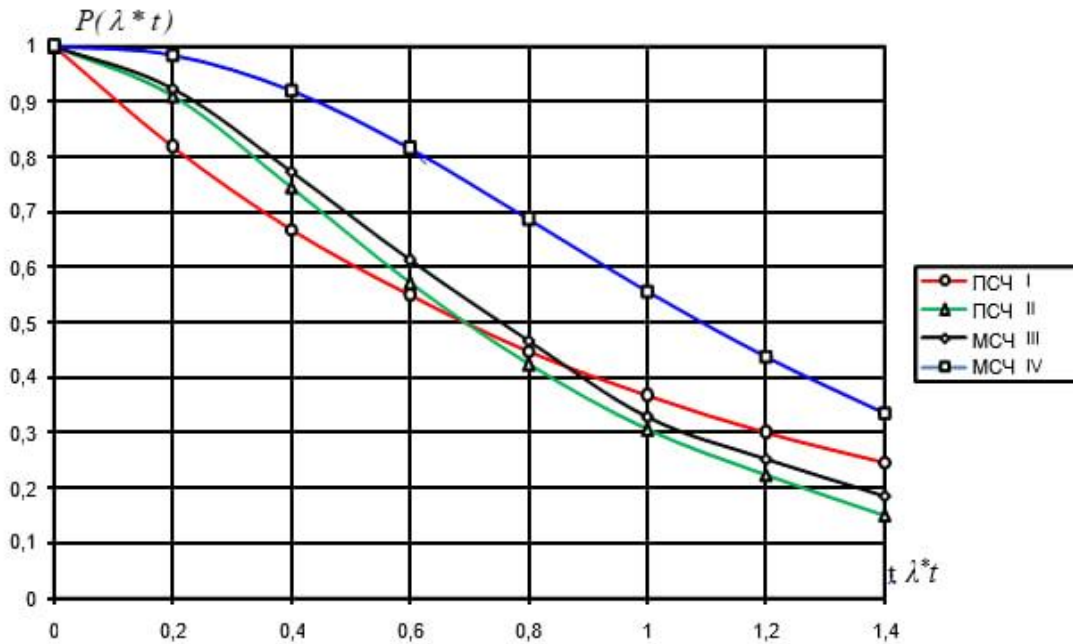


Рис. 2. Графіки залежностей  $P(\lambda^* t)$  КС

Таблиця 1 – Розрахункові дані надійності КС у ПСЧ та МСЧ

$\lambda^* t$	ПСЧ		МСЧ	
	I	II	III	IV
0	1	1	1	1
0,2	0,819	0,912	0,926	0,986
0,4	0,670	0,746	0,775	0,922
0,6	0,549	0,573	0,613	0,816
0,8	0,449	0,424	0,468	0,687
1	0,368	0,306	0,328	0,558
1,2	0,301	0,225	0,254	0,439
1,4	0,247	0,151	0,187	0,337

У табл. 2 представлені, наведені до одного двійкового розряду, деякі дані про додаткову кількість обладнання  $\Delta A$ , необхідного для реалізації розглянутих методів підвищення надійності, які показують, що застосування кодів МСЧ забезпечує високе значення ймовірності безвідмовної роботи ТОІ при меншій кількості додатково введеного обладнання [6].

Таблиця 2 – Розрахункові дані про кількість додаткового обладнання

	ПСЧ		МСЧ	
	I	II	III	IV
Кількість обладнання	8	24	15	19
Додаткове обладнання $\Delta A$	-	200%	87,5%	137,5%

Видно, що комп'ютерна система у модулярній системі числення з однією контрольною основою (III) надійніша, ніж потроєна система в позиційній системі числення (II).

Отже, МСЧ розширює область значень ( $\lambda^* t$ ) при яких існує виграв у порівнянні з нерезервованою позиційною (I) КС у безвідмовності.

Нехай  $k = 2$ .

У цьому випадку МСЧ можна подати у вигляді набору наступних основ:

$$m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = 5, \\ m_4 = 7, m_5 = 11, m_6 = 13.$$

Для даної МСЧ вираз (11) запишемо так:

$$P_{МСЧ}^{(2)}(t) = P_1^4(t) \times \left\{ P_1^2(t) + 6P_1(t)[1 - P_1(t)] + 15[1 - P_1(t)]^2 \right\} \quad (13)$$

або

$$P_{МСЧ}^{(2)}(t) = e^{-2\lambda^*t} \left[ e^{-\lambda^*t} + 15(1 - e^{-0.5\lambda^*t})^2 + 6e^{-0.5\lambda^*t}(1 - e^{-0.5\lambda^*t}) \right]. \quad (14)$$

Таким чином, зі збільшенням кратності резервування надійність КС підвищується, що відповідає загальній теорії надійності.

### Висновки

У статті дано наукове обґрунтування можливості використання МСЧ для створення відмовостій-

ких КС. Показано, що при синтезі КС по основі МСЧ можна отримати якісно нові наукові та практичні результати, що дозволяють покращити основні тактично-технічні характеристики КС (відмовостійкість, надійність тощо) за рахунок можливості організації принципово нової структури КС та застосування нових оригінальних методів та алгоритмів обробки інформації.

Досліджено та отримано, з використанням формалізованої моделі відмовостійкості комп'ютерних систем, математичну модель надійності КС, що функціонує у МСЧ, по основі використання принципу пасивної відмовостійкості. Дослідження моделі показало, що зі збільшенням кратності резервування надійність комп'ютерних систем підвищується, що відповідає загальній теорії надійності, а КС у МСЧ з двома контрольними основами надійніше за потроєна КС використовує позиційну систему числення (до 25%).

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Mohan P. V. A. Residue Number Systems: Theory and Applications. Birkhäuser Basel, Switzerland, 2016, 351 p. ISBN-10:331941383X, ISBN-13: 978-3319413839.
2. Krasnobayev V., Kuznetsov A., Yanko A., Koshman S., Zamula A. and Kuznetsova T. Data processing in the system of residual classes. Monograph. ASC Academic Publishing, 2019, 208 p. ISBN: 978-0-9989826-6-3, ISBN: 978-0-9989826-7-0 (Ebook).
3. Krasnobayev V., Kuznetsov A., Kiian A., Kuznetsova K. Fault Tolerance Computer System Structures Functioning in Residue Classes. Proceedings of 2021 11th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS), Cracow, 2021, pp. 471-474. doi: 10.1109/IDAACS53288.2021.9660919.
4. Liu R., Li L., Yang, Y. Performance Residual Based Fault Detection for Feedback Control Systems. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs 68 (2021) 3291-3295. doi:10.1109/TCSII.2021.3062718.
5. Fairclough H. & He, Linwei & Asfaha, Tekle & Rigby, Sam. (2023). Adaptive topology optimization of fail-safe truss structures. Structural and Multidisciplinary Optimization. doi: 66. 10.1007/s00158-023-03585-x.
6. Geng Z., Han M., Bao W., Xie W. New Submodule Topology Based Fault Tolerance for Modular Multilevel Converters. IEEE Transactions on Power Delivery, 2023. pp 1-12. doi: 10.1109/TPWRD.2023.3237891.

Received (Надійшла) 19.06.2023

Accepted for publication (Прийнята до друку) 30.08.2023

### Mathematical model of the reliability of the cs operating in the MNS based on the use of the principle of passive fault tolerance

Alina Yanko, Victor Krasnobayev, Polina Sabelnikova

**Abstract.** The analysis of the state and prospects for the development of modern computer systems (CS) showed that the problem of increasing fault tolerance, which is the basis of reliability, cannot be effectively solved based on the use of the traditional binary positional number system without worsening the rest of the technical and economic indicators of the CS. In the positional numeral system (PNS), the execution of an arithmetic operation involves the sequential processing of the digits of operands according to the rules determined by the content of the operation, and cannot be completed until the values of all intermediate results are sequentially determined taking into account all the connections between the digits. Thus, PNSs, in which information is presented and processed in modern computers, have a significant drawback – the presence of inter-bit relations, which impose its imprint on the methods of implementing arithmetic operations, complicate the equipment and limit the speed. The results obtained as a result of the conducted research and previous positive results show the perspective of using the modular number system (MNS) to increase the fault tolerance and reliability of the CS. The use in the CS as a number system of the MNS allows to positively solve the scientific and applied problem of ensuring the fault tolerance of the CS without reducing the user productivity of information processing with significantly less, than in the PNS, the additionally introduced amount of equipment. It is proposed to use the probability of no-failure operation as the main indicator for assessing the reliability of the functioning of the CS. Using a formalized model of fault tolerance of the CS, a mathematical model of the reliability of the CS operating in the MNS was investigated and obtained based on the use of the principle of passive fault tolerance. A mathematical model of CS fault tolerance, which, unlike the known ones, is based on the use of the properties of modular arithmetic, by taking into account the peculiarities of the functioning of information processing paths in the MNS, allows increasing the reliability of the CS. The study of the model showed that with an increase in the multiplicity of redundancy, the reliability of the CS in the MNS (with two control bases) increases to 25% compared to the tripled CS using the positional number system.

**Keywords:** probability of failure-free operation, mathematical model, modular number system, reliability model, computer system, passive fault tolerance.