УДК 004.9 **doi: 10.26906/SUNZ.2023.1.138**

О. Є. Пономаренко, В. О. Горбачов

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна

АГРЕГАЦІЯ СТРУКТУРНОЇ МОДЕЛІ СКЛАДНИХ МЕРЕЖНИХ СИСТЕМ

Анотація. Складні системи потребують спеціальних методів аналізу та проектування. Основна мета цих методів полягає в тому, щоб зменшити розмір системи. Потрібно знайти простіше представлення таких систем зі збереженням властивостей системи початкової розмірності. В роботі розглядаються формальні перетворення структурної моделі системи за допомогою агрегації. Цей підхід допомагає зменшити розмірність та обчислювальну складність системи. **Предметом дослідження** є методи перетворення структурної моделі систем**. Метою роботи** є дослідження агрегації структурної моделі систем, що забезпечує зменшення розмірності, обчислювальної складності та часу вирішення проблеми. **Актуальність роботи** полягає у тому, що ряд проблем може вирішуватися на більш високому рівні ієрархії системи, який можна отримати в результаті агрегації структурної моделі системи. В роботі були **вирішені наступні задачі:** перетворення структурної моделі системи та створення ієрархічної системи за допомогою агрегації; оцінка ефективності перетворення структурної моделі системи за допомогою вирішення задачі пошуку максимального потоку. **В результаті дослідження** була створена ієрархічна система; продемонстрована ефективність методу на прикладі вирішення задачі про максимальний потік. Результати оцінки ефективності перетворень структурної моделі системи: зменшуються кількість елементів в системі, кількість зв’язків між елементами в системі та кількість ітерацій обходу графа; значення максимального потоку є однаковим для двох рівнів системи. Дослідження дозволяють зробити **висновки**: методи перетворення структурної моделі забезпечують простіше представлення складних систем, зберігаючи при цьому топологічні властивості системи на більш високому рівні; в результаті агрегації структурної моделі зменшується розмірність системи, обчислювальна складність та час вирішення проблеми; агрегація надає ефективні способи обчислення бажаних величин для систем завдяки зменшенню розмірності системи.

Ключові слова: агрегація структурної моделі, перетворення структурної моделі, складні системи, зменшення розмірності системи, максимальний потік.

Вступ

Складні системи зустрічаються в багатьох сферах та характеризуються великою розмірністю та обчислювальною складністю. Останнім часом було розроблено велику кількість нових інструментів та методів для роботи з різними великомасштабними складними мережами [1].

Мережі використовуються як загальна модель множини складних систем. Складна система містить велику кількість елементів та зв’язків між ними. Якщо мати на увазі опис системи на рівні окремих одиниць, може бути корисним розділити елементи системи на групи, які можна розглядати як підсистеми, та отримати ефективні взаємодії між ними. Таким чином, можна отримати опис на більш високому рівні системи.

Багато складних систем можна представити як багаторівневі мережі, що складаються з окремих елементів, які взаємодіють і залежать один від одного, та мають нетривіальні топологічні властивості [2].

Складні системи потребують спеціальних методів аналізу та проектування, основна мета яких полягає в тому, що вони зменшують систему до меншого виміру, використовуючи її агрегацію або декомпозицію.

Існує три групи задач для складних систем: аналіз властивостей та поведінки системи в залежності від її структури та значення її параметрів; вибір структури та значень параметрів на основі властивостей системи; побудова складних систем.

Дана робота присвячена агрегації як методу перетворення структурної моделі складних систем з метою зменшення розмірності системи, коли час відіграє важливу роль у вирішенні задач керування в реальному часі та коли час моделювання системи є критичним параметром.

Актуальність роботи полягає у тому, що деякі проблеми можуть бути вирішені на більш високому рівні ієрархії системи. Для цього здійснюється агрегація структурної моделі, яка полягає в об’єднанні елементів системи у підсистеми, в результаті чого формується ієрархічна система. Перевагою цього підходу є зменшення кількості елементів системи та зв’язків між ними, зменшення розмірності системи, обчислювальної складності та часу вирішення проблеми.

Аналіз літератури

За останній час зросла кількість робіт, які присвячені вивченню складних мереж або, іншими словами, складних систем з мережевою топологією. Мережі використовуються як загальна модель різноманітних складних систем.

Використовується наступна класифікація складних мереж [3]: технологічні, біологічні, екологічні та соціальні. Значна увага приділяється теорії мереж, мережевому моделюванню.

Математична модель системи складається з двох частин: опису її елементів і опису структури системи. Формальна техніка, що описує математичні моделі систем, включає теорію масового обслуговування, мережі Петрі, алгебру процесів і теорію множин.

Ряд проблем системного аналізу потребує дослідження структурної моделі складної системи. При цьому деякі проблеми вирішуються лише шляхом перетворення існуючої структури в таку, що дозволяє досягти вирішення поставлених перед дослідженням завдань.

Автори [4] застосовують агрегацію елементів мережі масового обслуговування з метою зменшення її розмірності та скорочення часу моделювання. Моделювання реальної системи може зайняти багато часу, тому необхідні методи для моделювання великих систем з відповідним балансом точності та швидкості. Основний підхід полягає в тому, щоб розділити мережу на дві підмережі: C та R. Підмережа C містить основні вузли, а підмережа R містить інші вузли. Мета полягає в перетворенні підмережі R до меншої підмережі R* таким чином, щоб моделювання C з R* наближалося до моделювання C з R. Показники продуктивності C повинні бути однаковими в обох мережах, але показники продуктивності в R* та R не обов'язково повинні співпадати. Таким чином, підмережа R зводиться до меншої підмережі R*, тому перетворена мережа менша, ніж початкова мережа.

Автори [5] досліджують схеми агрегації марковських процесів. Підхід полягав у тому, щоб об'єднати стани марковського процесу в групи та запропонувати марковський процес на множині груп, який має агреговану стаціонарну ймовірність. Потенційними перевагами є ефективні обчислення, включаючи повторне обчислення для врахування локальних змін.

Автори [6] розглядають метод дослідження складної системи на основі її декомпозиції. Метод полягає у декомпозиції великомасштабних моделей у взаємопов'язаний граф логічних процесів, здатних одночасно обробляти події моделювання на сучасних паралельних платформах.

Метод зменшує розмірність моделі системи та покращує продуктивність моделювання системи на паралельних платформах.

Агрегація використовується в статті [7] для пошуку найкоротших шляхів у графі. Це може бути застосовано в розробці супутникової навігації, щоб мати можливість реагувати в режимі реального часу на оновлення дорожнього трафіку.

Вирішення задач топологічного аналізу потребує великих обчислювальних ресурсів і розвитку математичних методів. Такі задачі можна об'єднати в наступні групи.

1. Розробка структурного опису складної системи. До цієї групи належать завдання, що визначають топологічну структуру системи: визначення елементів та підсистем складної системи, визначення зв'язків між ними.

2. Визначення характеристик складної системи із заданою топологічною структурою, наприклад, визначення найкоротших шляхів, циклів. Також модель структури системи використовується для аналізу показників якості структури, наприклад, аналіз кількості зв'язків між підсистемами, пропускної здатності або інших характеристик каналів, швидкості передачі повідомлень по каналах.

3. Еквівалентні перетворення топологічної структури складної системи.

Більшість завдань третьої групи є завданнями підвищеної складності. Проектування структури мережевих систем є одним з основних завдань і полягає у виборі оптимальної схеми з'єднання вузлів та виборі пропускної здатності каналів.

У цій роботі розглядається задача еквівалентних перетворень структурної моделі системи, яка належить до третьої групи задач топологічного аналізу. Еквівалентні перетворення можна застосувати в наступних випадках: перерозподіл зв'язків і схем взаємодії в рамках початкової структури; агрегація та декомпозиція компонентів системи; зменшення розмірності системи, коли час відіграє важливу роль у вирішенні завдань управління в реальному часі, а також, коли час моделювання системи є критичним параметром [8].

Формальний опис агрегації структурної моделі системи

В цьому розділі розглядається побудова моделі структури системи та алгоритм агрегації структурної моделі системи. Розглядаються задачі перетворення схеми зв'язку елементів.

Система S складається з елементів $C_1, C_2, ..., C_N$ та зовнішнього середовища C_0 [9]. Елементи системи мають вхідні контакти $X_i^{(j)}$, де i = 1,2, ..., m і вихідні контакти $Y_l^{(j)}$, де l = 1,2,...,r. Елемент C_j містить m_j вхідних контактів; контакт $X_i^{(j)}$ приймає елементарні сигнали $x_i^{(j)}(t)$; $i=1,2,...,m_j$; $j=1,2,...,N$. Елемент C_j містить r_j вихідних контактів; контакт $Y_l^{(j)}$ видає елементарні сигнали $y_l^{(j)}(t)$; $l = 1,2,...,r_j$.

Зовнішнє середовище системи представляється фіктивним елементом C_0, який містить m_0 вхідних контактів $X_i^{(0)}$ та r_0 вихідних контактів $Y_l^{(0)}$. Таким чином, кожен C_j елемент системи S характеризується множиною вхідних контактів $X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, ..., X_m^{(j)}$ та множиною вихідних контактів $Y_1^{(j)}, Y_2^{(j)}, ..., Y_m^{(j)}$.

Для формального опису з'єднання елемента C_j з іншими елементами та зовнішнім середовищем використовується математична модель, що складається з множин $[X_i^{(j)}]_1^m$ та $[Y_l^{(j)}]_1^r$, де i – номер вхідного контакту, i=1,2,...,m; l – номер вихідного контакту, l=1,2,...,r; j – номер елемента системи, j=1,2,...,N.

До вхідного контакту будь-якого елемента системи підключається не більше ніж один елементарний канал, а до вихідного контакту може бути підключено будь-яке кінцеве число елементарних каналів за умови, що до входу одного і того ж елемента системи направляється не більше ніж один зі згаданих елементарних каналів.

Згідно з припущенням, що кожному вхідному контакту $X_i^{(j)}$ відповідає не більше ніж один вихідний контакт $Y_l^{(k)}$, вводиться однозначний оператор [10]:

$$Y_l^{(k)} = R(X_i^{(j)}), \tag{1}$$

де область визначення на множині:

$$\cup_{j=0}^{N} \left[X_i^{(j)}\right]_1^m, \tag{2}$$

та область значень на множині:

$$\cup_{k=0}^{N} \left[Y_l^{(k)}\right]_1^r. \tag{3}$$

Оператор (1) з областю визначення та областю значень називається схемою сполучення елементів в системі S і оператором сполучення або формальною моделлю структури системи.

Схема першого рівня системи представлена на рис. 1.

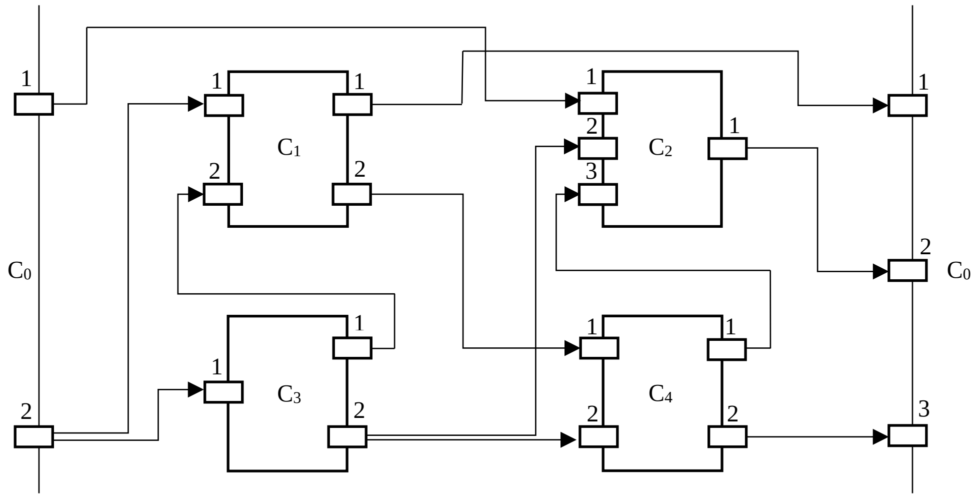

Рис. 1. Схема першого рівня системи

Оператор сполучення елементів в системі можна задати у вигляді таблиці, де на перетині рядків з номерами елементів системи (j) та стовпців з номерами її вхідних контактів (i) розташовуються пари чисел (k, l), що вказують номер елемента (k) та номер вихідного контакту (l), з яким з'єднаний контакт $X_i^{(j)}$.

Сполучення елементів першого рівня системи представлені у табл. 1.

Таблиця 1 – **Сполучення елементів на першому рівні системи**

i\j	1	2	3
0	1,1	2,1	4,2
1	0,2	3,1	-,-
2	0,1	3,2	4,1
3	0,2	-,-	-,-
4	1,2	3,2	-,-

Відповідність між $Y_l^{(k)}$ і $X_i^{(j)}$, що описується оператором (1), не є взаємно однозначною. Таким чином, маємо неоднозначний оператор:

$$X_i^{(j)} = R^{-1}\left(Y_l^k\right), \quad (4)$$

де $X_i^{(j)}$ – вхідні контакти елемента; $Y_l^{(k)}$ – вихідні контакти елемента.

Перший етап агрегації полягає в об'єднанні елементів у підсистеми. Складна система S розділяється на підсистеми S_μ, де μ = 1, 2, ..., M, які містять не менше ніж один елемент. Елемент C_j може входити лише в одну з підсистем S_μ. Якщо елемент C_j не входить ні в одну з підсистем, то цей елемент самостійно формує підсистему, наприклад, $S_{\mu 0}$. Здійснимо агрегацію таким чином: $S_{\mu 0}=\{C_0\}$; $S_{\mu 1}=\{C_1,C_3\}$; $S_{\mu 2}=\{C_2,C_4\}$.

Наступним етапом агрегації є визначення фіктивних контактів підсистеми.

Підсистема S_μ є одночасно і складною системою, подібно системі S, і елементом системи S.

У першому випадку підсистема S_μ розглядається як самостійна система та повинна мати зовнішнє середовище, що представляється фіктивним елементом C_0^μ. Внутрішня структура зовнішнього середовища є невидимою для елементів підсистеми S_μ. У цьому випадку зовнішнє середовище, яке представляється фіктивним елементом C_0^μ, взаємодіє з підсистемою S_μ через свої вхідні контакти $X_i^{(0)\mu}$, які з'єднані з виходами елементів підсистеми S_μ, а також через вихідні контакти $Y_l^{(0)\mu}$, які з'єднані з входами елементів підсистеми S_μ.

У другому випадку підсистема S_μ розглядається як елемент системи S. Внутрішня структура підсистеми S_μ є невидимою для інших підсистем системи S. Кожна підсистема на межі повинна мати фіктивні вхідні $X_i^{(\mu)}$ і фіктивні вихідні $Y_l^{(\mu)}$ контакти для зв'язку з іншими підсистемами системи S.

Таким чином, пара контактів $X_i^{(\mu)}$ та $Y_l^{(0)\mu}$, а також $X_i^{(0)\mu}$ та $Y_l^{(\mu)}$ об'єднуються в «подвійні» фіктивні контакти на межі підсистеми S_μ (рис. 2). Введення поняття фіктивних контактів відіграє важливу роль для кожної підсистеми S_μ. При необхідності підсистему S_μ можна замінити на нову, завдяки чому можна покращити продуктивність системи S або розширити функціональність.

Існує дві множини контактів елементів підсистеми S_μ:

– множина вихідних контактів всіх елементів C_j, де $C_j \in S_\mu$, які з'єднані елементарними каналами з вхідними контактами елементів C_k, де $C_k \notin S_\mu$, а також з вхідними контактами фіктивного елемента C_0:

$$\left[Y_l^{(j)}\right]_\mu, \quad (5)$$

де μ – номер підсистеми;

– множина вхідних контактів всіх елементів C_j, де $C_j \in S_\mu$, з'єднаних елементарними каналами з вихідними контактами елементів C_k, де $C_k \notin S_\mu$, а також з вихідними контактами фіктивного елемента C_0:

$$\left[X_l^{(j)}\right]_\mu, \quad (6)$$

де μ – номер підсистеми.

Для множини контактів елементів підсистеми S_μ потрібно визначити фіктивні контакти, що з'являються при поділі системи S на підсистеми S_μ. В результаті буде сформовано дві групи фіктивних контактів: перша група характеризує підсистему S_μ як складну систему, а друга група контактів характеризує підсистему як елемент системи S.

Розглянемо множину $[Y_l^{(j)}]_\mu$ всіх елементів C_j, де $C_j \in S_\mu$, які з'єднані елементарними каналами з вхідними контактами елементів C_k, де $C_k \notin S_\mu$, а також з вхідними контактами фіктивного елемента C_0.

Кожному $Y_l^{(j)} \in [Y_l^{(j)}]_\mu$ ставиться у відповідність пара операторів:

$$Y_l^{(\mu)} = Q_\mu(Y_l^{(j)}), \quad (7)$$

$$X_i^{(0)\mu} = Q'_\mu(Y_l^{(j)}). \quad (8)$$

Оператори (7), (8) називаються операторами нумерації фіктивних контактів підсистеми S_μ, пов'язаних з контактами $Y_l^{(j)}$ всіх елементів C_j, що належать підсистемі S_μ, і з'єднаних елементарними каналами з вхідними контактами елементів C_k, котрі належать до підсистеми S_μ, і з вхідними контактами фіктивного елемента C_0. Оператори Q_μ та Q'_μ задаються таблицею нумерації фіктивних контактів.

Алгоритм формування фіктивних контактів для множини $[Y_l^{(j)}]_\mu$ полягає в наступному. На першому етапі для підсистеми S_μ формується множина $[Y_l^{(j)}]_\mu$. Потім визначаються контакти, що належать елементу C_j, де $C_j \in S_\mu$. На другому етапі кожному $Y_l^{(j)}$ з цієї множини ставиться у відповідність пара фіктивних контактів, які після нумеруються з використанням операторів (7), (8). Нумерація фіктивних контактів підсистеми $S_{\mu 2}$, підключених до контактів множини $[Y_l^{(j)}]_{\mu 1}$, представлена у табл. 2.

Таблиця 2 – **Таблиця нумерації фіктивних контактів підсистеми $S_{\mu 2}$, підключених до контактів множини $[Y_l^{(j)}]_{\mu 1}$**

Оператор	2,1	4,2
$Q_{\mu 1}$	1	2
$Q'_{\mu 1}$	1	2

Розглянемо множину $[X_l^{(j)}]_\mu$ всіх елементів C_j, де $C_j \in S_\mu$, з'єднаних елементарними каналами з вихідними контактами елементів C_k, де $C_k \notin S_\mu$, а також з вихідними контактами фіктивного елемента C_0.

Вводяться оператори нумерації фіктивних контактів:

$$X_i^{(\mu)} = P_\mu(X_i^{(j)}), \quad (9)$$

$$Y_l^{(0)\mu} = P'_\mu(X_i^{(j)}). \quad (10)$$

Оператори (9), (10) формують фіктивні контакти підсистеми S_μ, які пов'язані з контактами $X_i^{(j)}$ всіх елементів $C_j \in S_\mu$ і з'єднані елементарними каналами з вихідними контактами елементів $C_k \notin S_\mu$ і з вихідними контактами фіктивного елемента C_0. Розглянуті оператори можуть бути представлені у вигляді таблиць фіктивних контактів.

Алгоритм формування фіктивних контактів для множини $[X_l^{(j)}]_\mu$ полягає в наступному.

На першому кроці для підсистеми S_μ формується множина $[X_l^{(j)}]_\mu$. Потім визначаються контакти, що належать елементу C_k, де $C_k \notin S_\mu$.

На другому кроці кожному $X_l^{(j)}$ ставиться у відповідність пара фіктивних контактів, які потім нумеруються з використанням операторів (9), (10). Нумерація фіктивних контактів підсистеми $S_{\mu 2}$, підключених до контактів множини $[X_l^{(j)}]_{\mu 1}$, представлена у табл. 3.

Таблиця 3 – **Таблиця нумерації фіктивних контактів підсистеми $S_{\mu 2}$, підключених до контактів множини $[X_l^{(j)}]_{\mu 1}$**

Оператор	2,1	4,1	2,2	4,2
P_μ	1	2	3	3
P'_μ	1	2	3	3

Наступним етапом агрегації є визначення зв'язків між елементами в підсистемі. Розглянемо підсистему S_μ як самостійну систему, тобто C_0 і всі інші компоненти системи S представляють для S_μ зовнішнє середовище $C_0^{(\mu)}$. При побудові схеми сполучення необхідно враховувати два типи з'єднань. У першому випадку – це внутрішні з'єднання вхідних і вихідних контактів елементів C_j, де $C_j \in S_\mu$. У другому випадку – це з'єднання вхідних і вихідних контактів елементів C_j, що належать S_μ, з вхідними та вихідними контактами елемента $C_0^{(\mu)}$, що представляє зовнішнє середовище по відношенню до підсистеми S_μ.

У першому випадку множини $[X_i^{(j)}]_1^m$ та $[Y_l^{(j)}]_1^r$ контактів для елементів $C_j \in S_\mu$ задані, а оператор сполучення R_μ дорівнює R.

У другому випадку підсистема S_μ повинна мати контакти $X_i^{(0)\mu}$ та $Y_l^{(0)\mu}$, що з'єднують відповідно входи фіктивного елемента $C_0^{(\mu)}$ з виходами елементів підсистеми S_μ, також виходи фіктивного елемента $C_0^{(\mu)}$ з входами елементів підсистеми S_μ. Таким чином, оператор Q'_μ визначає вхідні контакти $X_i^{(0)\mu}$, та оператор P'_μ визначає вихідні контакти $Y_l^{(0)\mu}$.

$$\left[X_i^{(0)\mu}\right]_1^m = Q'_\mu(\left[Y_l^{(j)}\right]_\mu). \quad (11)$$

$$\left[Y_l^{(0)\mu}\right]_1^r = P'_\mu(\left[X_i^{(j)}\right]_\mu). \quad (12)$$

Схема сполучення для підсистеми S_μ як самостійної системи буде визначена за допомогою оператора сполучення R_μ – внутрішнього оператора сполучення елементів в підсистемі S_μ:

$$Y_l^{(k)} = R_\mu(X_i^{(j)}). \quad (13)$$

Сполучення елементів підсистеми $R_{\mu 2}$ представлені у табл. 4.

Таблиця 4 – **Таблиця сполучення елементів підсистеми $R_{\mu 2}$**

i\j	1	2	3
0	2,1	4,2	-,-
2	0,1	0,3	4,1
4	0,2	0,3	-,-

Наступним етапом агрегації є побудова другого рівня системи. Підсистема S_μ може розглядатися як елемент системи S. Підсистема характеризується:

- множиною $[X_i^{(j)}]_\mu$, яка позначає множину вхідних контактів всіх елементів $C_j \in S_\mu$, з'єднаних елементарними каналами з вихідними контактами елементів $C_k \notin S_\mu$ і вихідними контактами фіктивного елемента C_0;

- множиною $[Y_l^{(j)}]_\mu$, яка позначає множину вихідних контактів $Y_l^{(j)}$ всіх елементів C_j, що належать підсистемі S_μ, які з'єднані елементарними каналами з вхідними контактами елементів $C_k \notin S_\mu$ і вхідними контактами фіктивного елемента C_0;
- множиною фіктивних вхідних контактів $[X_i^{(\mu)}]_1^m$, де $X_i^{(\mu)}$ – вхідний контакт підсистеми;
- множиною фіктивних вихідних контактів $[Y_l^{(\mu)}]_1^r$, де $Y_l^{(\mu)}$ – вихідний контакт підсистеми.

Для побудови схеми сполучення підсистем S_μ, $\mu = (\mu_0,\mu_1,\mu_2,\ldots\mu_M)$ в системі S вводиться оператор сполучення підсистем:

$$Y_l^{(v)} = R_{II}(X_i^{(\mu)}), \tag{14}$$

де область визначення на множині:

$$\bigcup_{\mu=0}^{M}\left[X_i^{(\mu)}\right]_1^m, \tag{15}$$

область значень на множині:

$$\bigcup_{\mu=0}^{M}\left[Y_l^{(\mu)}\right]_1^r, \tag{16}$$

де M – кількість підсистем в системі.

Оператор (14) вхідному фіктивному контакту $X_i^{(\mu)}$ ставить у відповідність вихідний фіктивний контакт $Y_l^{(v)}$, з'єднаний з $X_i^{(\mu)}$ елементарним каналом, якщо таке з'єднання в системі S існує. Для фіктивного контакту $X_i^{(\mu)}$ визначається пов'язаний з ним один з контактів $X_i^{(j)}$:

$$X_i^{(j)} = P_\mu^{-1}(X_i^{(\mu)}), \tag{17}$$

де $X_i^{(j)}$ – вхідний контакт елемента C_j, де $C_j \in S_\mu$. Оператор $P_\mu^{-1}(X_i^{(\mu)})$ є неоднозначним, тому в результаті може виявитися більше ніж один контакт $X_i^{(j)}$ для фіктивного контакту.

Сукупність схеми сполучення R_{II} підсистем S_μ в системі S і схем сполучення R_μ елементів C_j в підсистемах S_μ називаються дворівневою схемою сполучення системи S.

Сполучення елементів на другому рівні системи представлені у табл. 5.

Схема другого рівня системи представлена на рис. 2.

Таблиця 5 – **Сполучення елементів на другому рівні системи**

i\j	1	2	3
0	1,1	2,1	2,2
1	0,2	-,-	-,-
2	0,1	1,2	1,3

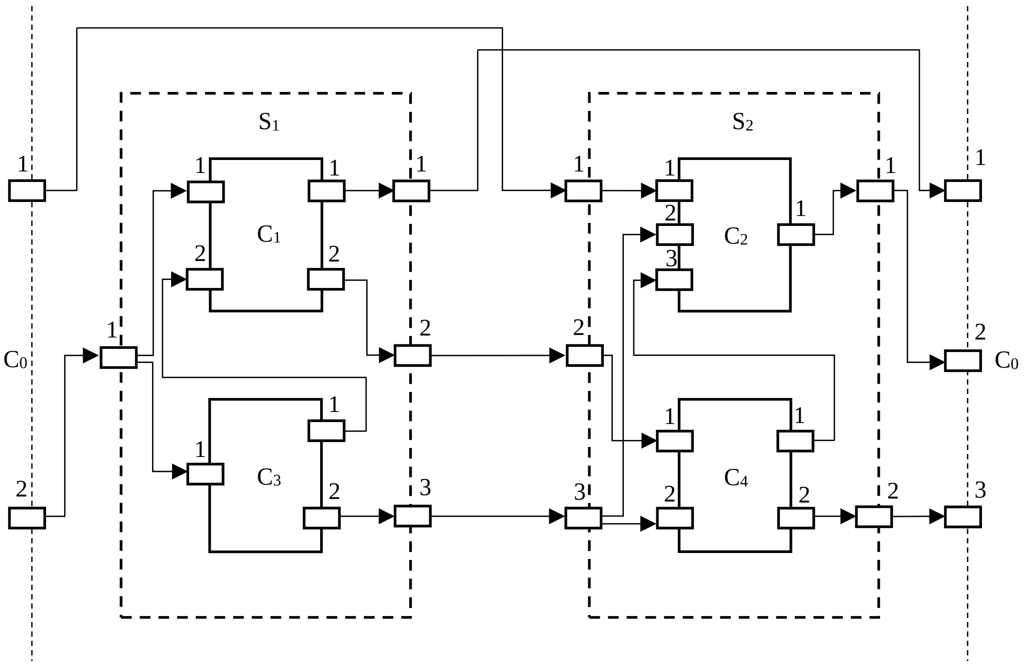

Рис. 2. Схема другого рівня системи

Оцінка ефективності перетворень структурної моделі системи

Для оцінки ефективності перетворення структурної моделі системи можна вирішити задачу про максимальний потік для кожного рівня ієрархічної системи. Задача про максимальний потік полягає в тому, щоб отримати значення максимального потоку мережі для заданої топології [11]. Задача про максимальний потік формулюється таким чином. Необхідно знайти максимальне можливе для даної мережі значення сумарного потоку між джерелом та стоком при заданих пропускних здатностях дуг мережі. Якщо потік не досяг максимального значення, то треба визначити, як його збільшити.

Для вирішення задачі про пошук максимального потоку використовується теорема, що буда доведена Фордом та Фалкерсоном, згідно з якою максимально можливе значення сумарного потоку на кінцевих дугах дорівнює мінімальній пропускній здатності обраного розрізу [12]. Під пропускною здатністю розрізу мається на увазі сума пропускних здатностей дуг, що утворюють розріз.

Алгоритм Форда-Фалкерсона включає наступні кроки:

- пошук на графі ланцюга з джерела в стік;
- для кожної дуги ставиться максимальне можливе значення потоку з джерела в стік, значення потоку не може бути більшим ніж вага дуги;
- якщо значення потоку дорівнює вазі дуги, то така дуга є насиченою, та через неї вже не можна пройти під час вибору ланцюгів у графі;
- алгоритм завершується тоді, коли перехід з джерела в стік стане неможливим.

Після завершення дії алгоритму значення максимального потоку дорівнює сумі потоків всіх дуг, інцидентних стоку графа.

Сполучення елементів першого рівня системи зі значеннями пропускної здатності представлені у табл. 6.

Таблиця 6 – **Сполучення елементів на першому рівні системи зі значеннями пропускної здатності**

i\j	1	2	3
0	1,1,11	2,1,15	4,2,19
1	0,2,27	3,1,5	-,-,-
2	0,1,25	3,2,7	4,1,5
3	0,2,29	-,-,-	-,-,-
4	1,2,9	3,2,15	-,-,-

Вирішимо задачу пошуку максимального потоку для першого рівня системи. Граф першого рівня системи представлений на рис. 3.

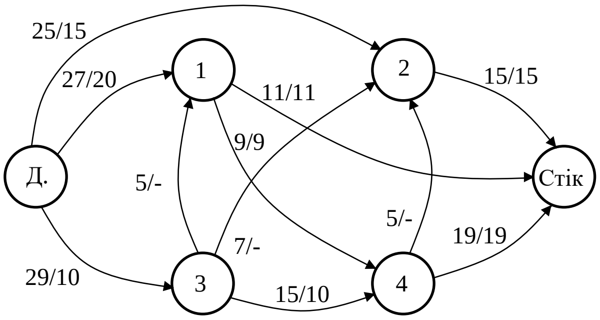

Рис. 3. Граф першого рівня системи

Результат обходу графа для першого рівня системи представлений у табл. 7.

Таблиця 7 – **Результат обходу графа для першого рівня системи**

№	Шлях	Значення потоку
1	Джерело–2–Стік	15
2	Джерело –1– Стік	11
3	Джерело –1–4– Стік	9
4	Джерело –3–4– Стік	10

Максимальний потік мережі визначається за формулою:

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i, \quad (18)$$

де n – кількість ребер, інцидентних стоку;

f_i – величина потоку ребра, інцидентного стоку;

За формулою (18) був знайдений максимальний потік мережі:

$$f_1 = 15 + 11 + 9 + 10 = 45 \quad (19)$$

В результаті агрегації структурної моделі був отриманий другий рівень системи. Сполучення елементів другого рівня системи зі значеннями пропускної здатності представлені у табл. 8.

Таблиця 8 – **Сполучення елементів на другому рівні системи зі значеннями пропускної здатності**

i\j	1	2	3
0	1,1,11	2,1,15	2,2,19
1	0,2,56	-,-,-	-,-,-
2	0,1,25	1,2,9	1,3,22

Вирішимо задачу пошуку максимального потоку для другого рівня системи. Граф другого рівня системи представлений на рис. 4.

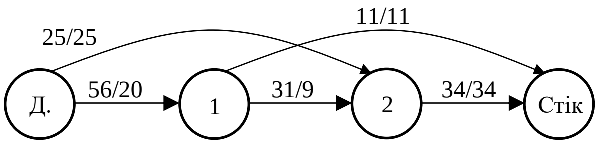

Рис. 4. Граф другого рівня системи

Результат обходу графа для другого рівня системи представлений у табл. 9.

Таблиця 9 – **Результат обходу графа для другого рівня системи**

№	Шлях	Значення потоку
1	Джерело –2– Стік	25
2	Джерело –1– Стік	11
3	Джерело –1–2– Стік	9

За формулою (18) був знайдений максимальний потік мережі:

$$f_2 = 25 + 11 + 9 = 45 \quad (20)$$

В результаті вирішення задачі значення максимального потоку однакове на двох рівнях системи. Тому можна зробити висновок, що в даному випадку перетворення структурної моделі системи є еквівалентними.

В результаті перетворень структурної моделі системи зменшуються розмірність системи, обчислювальна складність та час вирішення задачі. Результати оцінки ефективності перетворень структурної моделі системи: кількість елементів в системі зменшилась на 33%, кількість зв’язків між елементами в системі зменшилась на 36%, кількість ітерацій обходу графа зменшилась на 25%.

Висновки

У роботі була розглянута агрегація як метод перетворення структурної моделі системи, що забезпечує зменшення розмірності та обчислювальної складності системи. Було продемонстровано, що методи перетворення структурної моделі системи забезпечують простіше представлення систем, зберігаючи при цьому топологічні властивості більш високого рівня системи.

У роботі був представлений формальний опис агрегації структурної моделі системи на прикладі створення ієрархічної структури системи.

Для оцінки ефективності перетворення структурної моделі системи була вирішена задача про максимальний потік для кожного рівня ієрархічної системи. Було визначено, що в результаті перетворень структурної моделі системи зменшуються кількість елементів системи, кількість зв'язків між елементами системи та кількість ітерацій обходу графа, але значення максимального потоку є однаковим для двох рівнів системи.

Тому можна зробити висновок, що в результаті агрегації структурної моделі системи зменшуються розмірність системи, обчислювальна складність та час вирішення проблеми; на розглянутому прикладі можна здійснити зменшення розмірності системи зі збереженням коректності її параметрів.

Подальша робота полягає в застосуванні агрегації структурної моделі для зменшення розмірності складних систем з дуже великою кількістю елементів та зв'язків між ними. Це дозволить оцінити ефективність розглянутого метода для вирішення різних задач оптимізації, пов'язаних з великими мережами.

Список літератури

1. Newman M. (2010), Networks: An Introduction, Oxford University Press.
2. Lu J., Chen G., Ogorzalek M., Trajkovic L. (2013), "Theory and Applications of Complex Networks: Advances and Challenges", Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, pp. 2291–2294.
3. Landi P., Minoarivelo O.H., Brännström Å., Hui C., Dieckmann U. (2018), "Complexity and stability of ecological networks: a review of the theory", Population Ecology, pp. 319–345.
4. Shortle J.F., Mark B.L., Gross D. (2009), "Reduction of closed queueing networks for efficient simulation", ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, Vol. 19, No. 3, Article 10.
5. MacKay R.S., Robinson J.D. (2018), "Aggregation of Markov flows I: Theory", Philosophical Transactions of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences.
6. Liu J.X., Vorst N.V. (2012), "Realizing Large-Scale Interactive Network Simulation via Model Splitting", Proceedings of the 26th Workshop on Principles of Advanced and Distributed Simulation (PADS 2012), Zhangjiajie, China, pp. 3–12.
7. MacKay R.S. (2011), "Hierarchical aggregation of complex systems", Proceedings of the ECCS'11, Vienna, Austria.
8. Gorbachov V., Sytnikov D., Ryabov O., Batiaa A. K., Ponomarenko O. (2020), "Dimension Reduction for Network Systems Using Structure Model Aggregation", International Journal of Design & Nature and Ecodynamics, Vol. 15, No. 1, pp. 13–23.
9. Mesarović M., Mako D., Takahara Y. (1977), Theory of Hierarchical Multilevel Systems, New York: Academic.
10. Gorbachov V., Batiaa A. K., Ponomarenko O., Romanenkov Y. (2018), "Formal transformations of stuctural models of complex network systems", Proceedings of the IEEE 9th International Conference on Dependable Systems, Services and Technologies DESSERT'2018, Kyiv, Ukraine, pp. 473–477.
11. Cormen T., Leiserson C., Rivest R., Stein C. (2009), Introduction to algorithms, 3rd ed.
12. Ford L., Fulkerson D. (1956), "Maximal Flow Through a Network", Canadian Journal of Mathematics, 8, pp. 399–404.

Received (Надійшла) 11.01.2023
Accepted for publication (Прийнята до друку) 15.03.2023

Aggregation of structural model of complex network systems

Olha Ponomarenko, Valeriy Gorbachov

Abstract. Complex systems require special methods of analysis and design. The main goal of these methods is to reduce the size of the system. It is necessary to find a simpler representation of such systems while preserving the properties of the system with initial dimension. In this paper formal transformations of structural model of the system using aggregation are reviewed. This approach leads to reduction of system dimension and computational complexity. **The subject of research** is the methods of structural model transformation of the systems. **The goal of this work** is to investigate the aggregation of structural model of systems which provides the reduction of system dimension, computational complexity and time of problem solving. **The relevance of this research** is that several problems can be solved at a higher level of the system hierarchy, which can be obtained as a result of structural model aggregation of the system. **The following tasks were solved** in the work: structural model transformations of the system and creation of the hierarchical system using aggregation; evaluation of the effectiveness of structural model transformation of the system by solving the maximum flow problem. **As a result of this research** a hierarchical system was created; the effectiveness of the method was demonstrated on the example of solving of the maximum flow problem. The results of evaluating the effectiveness of structural model transformations of the system: the number of elements of the system, the number of connections between elements of the system, and the number of graph traversal iterations are reduced; the value of the maximum flow is the same at two levels of the system. The studies allow us to **conclude** that the structural model transformation methods provide a simpler representation of complex systems while preserving the topological properties of the system at a higher level; as a result of the aggregation of the structural model, dimension of the system, computational complexity and time of problem solving are reduced; aggregation provides efficient ways to compute desired quantities for systems by reducing dimension of the system.

Keywords: structural model aggregation, structural model transformation, complex systems, system dimension reduction, maximum flow.