УДК 004.94:519.157 **doi: 10.26906/SUNZ.2022.3.060**

В. В. Гавриленко, К. Є. Івохіна, Н. В. Рудоман

Національний транспортний університет, Київ, Україна

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ІМІТАЦІЇ ВІДПАЛУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЧІТКОЇ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА

Анотація. В даній статті розглянуто метод імітації відпалу для розв'язання нечіткої задачі комівояжера, яка формулюється як задача пошуку маршруту відвідування заданої кількості міст без повторень з мінімальною тривалістю пересування. Викладено зміст методу імітації відпалу, описано алгоритм формалізації методу. Наведено аксіоматику нечітких трикутних чисел. Сформульовано нечітку задачу комівояжера, у якій часові параметри пересування між містами задаються у вигляді правих нечітких чисел, величина носія в яких залежить від різних зовнішніх умов та факторів. Наведено результати розрахунків розв'язків задачі комівояжера у чіткій та нечіткій формах з різними параметрами зрізів нечітких чисел.

Ключові слова: задача комівояжера, метод імітації відпалу, алгоритм, нечіткі числа, множини рівня, формалізація часових інтервалів.

Вступ

На сьогоднішній день проблема пошуку найкоротшого шляху між двома пунктами є дуже актуальною: обсяги та потреби транспортно-логістичних послуг зростають щодня. Їх головна мета - побудова найточнішого маршруту для обслуговування максимальної кількості клієнтів. При цьому необхідно враховувати, що вибір невдалого шляху спричиняє додаткові витрати, уникати яких дуже важливо як з економічної, так і логістичної точок зору.

При цьому, варто відмітити, що існує набір факторів, що характеризують тривалість проходження шляху: наприклад, час доби, погодні умови, і навіть «навантаженість» проходження тієї чи іншої ділянки. Причому, для пошуку оптимального шляху необхідно враховувати їх взаємозв'язок. Для прикладу, довільна ділянка шляху у різний час доби має різне завантаження, а це значить, що тривалість проходження цієї ділянки буде відрізнятися в залежності від часу проходження. З іншого боку, погодні умови (туман, дощ) також є чинниками впливу на тривалість проходження ділянки.

Постановка задачі комівояжера (TSP, Travelling Salesman Problem)

Припустимо, що є представник торгівельної компанії (торговець або мерчендайзер), який хоче запропонувати або перевірити наявність товарів своєї фірми у пунктах продажу деякої сукупності міст конкретного регіону. Маршрут його руху повинен містити усі пункти, що прописані у завданні, причому, кожен з пунктів потрібно відвідати не більше одного разу. Такі подорожі забирають багато часу, тому логічно, що представник хоче скласти свій маршрут таким чином, щоб відстань, яку потрібно подолати, була мінімальною (в якості критерію може також розглядатися знаходження шляху мінімальної тривалості проходження або проходження з найменшими витратами). Пошук такого маршруту є основним завданням при розв'язуванні задачі комівояжера [1].

Задача комівояжера - комбінаторна задача, для розв'язання якої можуть бути використані методи математичного програмування. Щоб навести задачу до загального вигляду, пронумеруємо міста числами ($1, 2, 3, ..., n$), а маршрут комівояжера опишемо циклічною перестановкою номерів $t = (j_1, j_2, ..., j_n, j_1)$, причому усі $j_1, ..., j_n$ - різні номери. Номер j_1, який повторюється з початку й у кінці, показує, що перестановка є циклічною [2].

Сукупність міст можна розглядати у вигляді вершин деякого графу з заданими відстанями (або часом пересування) між усіма парами вершин c_{ij}, які утворюють матрицю $C=(c_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$. Вважаємо матрицю симетричною. Тоді формальне завдання полягає у тому, щоб знайти найкоротший маршрут (за часом або довжиною) t , який проходить через кожне місто та закін-чується в точці відправлення. У такій постановці задача називається замкненою задачею комівояжера (TSP), яка є відомою задачею математичного цілочисельного програмування.

Математична модель задачі TSP

Нехай $I=\{1,...,n\}$ - множина індексів вершин графу задачі. Цільова функція - сумарний час проходження маршруту, що включає у себе усі вершини графа задачі. Параметрами задачі є елементи матриці $C=(c_{ij})$, $i, j \in I$.

Змінними задачі є елементи бінарної матриці переходів між вершинами $X = \{x_{ij}\}$, $i, j \in I$, які дорівнюють 1, якщо у побудованому маршруті для задачі присутнє ребро (v_i, v_j), 0 - інакше [3]. Оптимальним маршрутом будемо називати найкоротший за часом маршрут:

$$E = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I, j \neq i} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

з обмеженнями

$$\sum_{j \in I, j \neq i} x_{ij} = 1, \; i \in I,$$

$$\sum_{i \in I, j \neq i} x_{ij} = 1, \; j \in I, \qquad (2)$$

$$v_i - v_j + n x_{ij} \le n - 1, \; 1 \le i \ne j \le n .$$

Остання нерівність забезпечує зв'язність маршруту обходу вершин, він не може складатися з двох і більше незв'язаних частин.

Алгоритми, що дозволяють вирішити проблему знаходження оптимального маршруту, можна поділити на точні та евристичні. Для невеликих задач (наприклад, з метою первинного проектування транспортної мережі малих розмірів) доцільно використовувати точні алгоритми, оскільки їх реалізації необхідні високі обчислювальні потужності, чого не можна сказати про реальні завдання: для них, як правило, необхідно використовувати евристичні алгоритми. Одним з таких методів є метод імітації відпалу [4].

Метод імітації відпалу

Підхід, що реалізований у методі імітації відпалу, запозичений з фізичних процесів. В його основу покладено процес кристалізації речовини, який знайшли металурги для підвищення однорідності металу.

Як відомо, у металів є кристалічні решітки, що визначають геометричне положення атомів речовини. Сукупність позицій всіх атомів називатимемо станом системи, кожному стану відповідає певний рівень енергії. Мета відпалу – привести систему до стану з найменшою енергією. Чим нижчий рівень енергії, тим «краще» кристалічна решітка, тобто, тим менше у неї дефектів і міцніше метал.

У ході відпалу метал спочатку нагрівають до деякої температури, що змушує атоми кристалічної решітки залишити свої позиції. Потім починається повільне та контрольоване охолодження. Атоми прагнуть потрапити у стан із меншою енергією, проте, з певною ймовірністю вони можуть перейти й у стан із більшою енергією. Ця ймовірність зменшується разом із температурою. Перехід у гірший стан, як не дивно, допомагає в результаті знайти стан з меншою енергією, ніж початковий. Процес завершується, коли температура падає до заданого значення.

Така складна схема з ймовірностями переходу з точки у точку необхідна для того, щоб алгоритм не зациклювався на локальному мінімумі, приймаючи його за глобальний оптимум. Для виходу з такої ситуації потрібно час від часу підвищувати енергію системи. При цьому, загальна тенденція до пошуку найменшої енергії зберігається У цьому й є сутність методу імітації відпалу.

Алгоритм формалізації методу імітації відпалу

Для опису алгоритму введемо позначення:

S – множина усіх станів системи;

$f(s)$ - функція зміни стану;

s_i - стан системи на *i-му* кроці;

s_k - новий стан (кандидат);

$t_{\min}$, t_i, $t_{\max}$ - мінімальна, поточна та вихідна температури відповідно;

$T(t)$ - функція зміни температури;

$E(s)$ - значення цільової функції.

Алгоритм починає працювати з вихідного стану s_1, початковою температурою $t_1 = t_{\max}$ і з заданою мінімальною температурою $t_{\min}$.

Для усіх номерів $i=1,2,\ldots$ поки $t_i > t_{\min}$ повторюємо:

1) $s_k = f(s_{i-1})$;

2) $\Delta E = E(s_k) - E(s_{i-1})$;

3) якщо $\Delta E < 0$, тоді $s_i = s_k$;

4) інакше прийняття нового стану відбувається з деякою ймовірністю $\exp(-\Delta E / t_i)$;

5) вибрати випадкове число M на інтервалі (0,1);

6) якщо $\exp(-\Delta E / t_i) > M$, виконати перехід $s_i = s_k$, інакше перейти до наступного кроку;

7) зменшити температуру t: $t_{i+1} = T(t_i)$;

8) повернути останній стан s_i, $i = i+1$.

Приклад розв'язання задачі методом імітації відпалу

Для демонстрації роботи алгоритму визначимо початкові дані. Розглянемо 100 міст, які випадково розташовані в квадраті (наприклад, 10x10 од.), n=100. Кожне місто, відповідно, представлене парою координат, час переміщення з кожного міста до інших задано матрицею $C=(c_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$ (рис. 1).

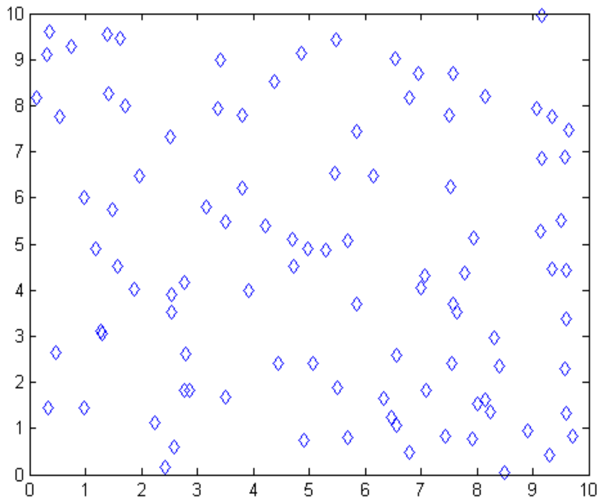

Рис. 1: Початкове розташування міст у тестовій задачі комівояжера

Для отримання нового стану $f(S)$ будемо міняти місцями два довільні міста у маршруті. Ідея правильна, але така зміна непередбачувано впливає на значення функції $E(s)$ і метод може працювати довго і не завжди успішно.

Хорошим варіантом у цьому випадку буде спосіб, за яким вибираються два довільні міста в маршруті та інвертується шлях між ними. Наприклад, для маршруту (1,2,3,4,5,6,7) за умови вибору номерів міст 2 та 7 процедура інвертування призводить до маршруту (1,7,6,5,4,3,2).

На рис. 2 зображено стан системи на першій ітерації, а на рис. 3 - результат на виході роботи алгоритму імітації відпалу.

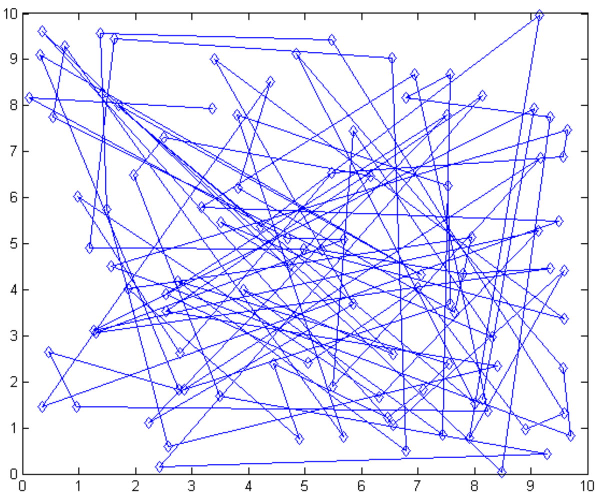

Рис. 2: Початковий стан системи (початковий маршрут)

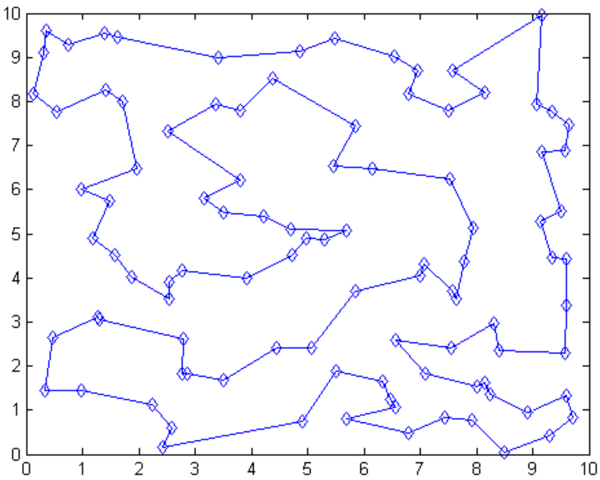

Рис. 3: Результат роботи алгоритму імітації відпалу (найкращій маршрут задачі комівояжера)

Остаточно, можна стверджувати, що незважаючи на те, що алгоритм у розглянутій реалізації працює відносно довго, конструктивність його застосування варто вважати досить ефективною. Потрібно також зазначити, що існують способи для покращення часу роботи алгоритму без втрати якості розв'язку (наприклад, метод динамічної адаптації [5]). Іншим цікавим напрямком досліджень у сфері застосування методу імітації відпалу є врахування факторів, що характеризують тривалість проходження ділянок маршруту. Відповідну невизначеність, яка з'являється у цьому випадку, можна формалізувати на основі нечітких чисел для вимірювання тривалості руху.

Аксіоматика нечітких чисел

Означення 1. [6] Нечітким трикутним числом $\tilde{b}$ називають впорядковану трійку чисел $\tilde{b} = \{(a,b,c)\}$, $a \le b \le c$, для якої визначено функцію належності $\mu_{\tilde{b}}(x) \in [0,1]$ вигляду:

$$\mu_{\tilde{b}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a,b];$$

$$\mu_{\tilde{b}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, x \in [b,c]; \ \mu_{\tilde{b}}(x) = 0, x \notin [a,c].$$

Нечіткі числа є частинним випадком не-чітких множин [7], у яких величина функції належності для довільного елемента визначає ступінь його належності до нечіткої множини.

Нечітке трикутне число вигляду *(a, b, b)*, що називається лівим нечітким трикутним числом [6], визначається функцією належності вигляду

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, x < a;$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a,b]; \ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1, x > b,$$

а нечітке трикутне число вигляду *(b, b, c)*, що називається правим нечітким трикутним числом, – функцією належності

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1, x < b; \ \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, x \in [b,c];$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, x > c.$$

Для нечіткого числа $\tilde{b}$ носієм

$$supp\ \tilde{b} = = \{x \in X : \mu_{\tilde{b}}(x) > 0\}$$

є інтервал[6]. При цьому, для нечіткого трикутного числа $\tilde{b} = (a,b,c)$ носієм буде інтервал (a,c), для правого нечіткого трикутного – інтервал $[b,c)$, для лівого нечіткого трикутного – інтервал $(a,b]$.

Множиною α–рівня (α–зрізом), $\alpha \in [0,1]$ нечіткого трикутного числа $\tilde{b} = (a,b,c)$ є звичайна множина (інтервал):

$$\bar{b}_\alpha = \{x \in [a,c]:\ \mu_{\tilde{b}}(x) \ge \alpha\},\ \alpha \in [0,1].$$

Припустимо, що вимірювання часу відбувається за допомогою інтервалів однієї тривалості (такими інтервалами можна вважати будь-яку одиницю часу, наприклад, 1 годину, 1 день або 1 рік, в залежності від темпів процесу). Для оцінки нечіткого відліку часу потрібно спостерігати за реальним проміжком, в межах якого завершується кожен інтервал часу. В цьому випадку, «швидкий» плин одиниці часу може бути заданий правим нечітким трикутним числом с носієм, довжина якого менше тривалості часового інтервалу, а «повільний» - такого ж вигляду нечітким числом з носієм, довжина якого більша за тривалість інтервалу. Очевидно, що, якщо час «тече» природним чином, то величина носія даного нечіткого числа за довжиною співпадає з величиною одиничного часового інтервалу.

Математична модель нечіткої задачі TSP

Для формалізації нечіткої задачі коміво-яжера вважаємо, що час переміщення між містами відомі наближено. Припустимо, що за результатами спостережень можна визначити параметри тривалості пересування на кожній ділянці маршруту у вигляді правих нечітких трикутних чисел

$$\tilde{T}_{ij} = (T_{ij}, T_{ij}, T_{ij} + \delta_{ij}),\ i, j = \overline{1,n},$$

де $\delta_{ij} \ge 0$, $i, j = \overline{1,n}$, - допустимі затримки у часі пересування, що залежать від різних факторів впливу на час проходження маршруту.

Зрозуміло, що у даному випадку параметри задачі, які задаються елементами матриці $C=(\tilde{c}_{ij})$, $i, j = \overline{1,n}$, є правими нечіткими трикутними числами $\tilde{c}_{ij} = \tilde{T}_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$. Цільова функція задачі комівояжера набуває вигляд

$$E = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I, j \neq i} \tilde{c}_{ij} x_{ij} \to \min , \quad (4)$$

яка разом з обмеженнями (2) є нечіткою оптимізаційною задачею [8], для розв'язання якої можна застосувати метод імітації відпалу.

Задамо деяке значення $\alpha \in [0,1]$, яке буде визначати рівень впливу різних факторів на тривалість проходження ділянок маршруту. Це дозволяє для будь-якого правого нечіткого числа $\tilde{c}_{ij}$ побудувати α–зрізи, які подаються у вигляді інтервалів часу, потрібних для подолання кожної з ділянок.

Застосовуючи метод імітації відпалу для крайніх значень цих інтервалів, розв'язуємо задачі комівояжера у найкращому та найгіршому випадках часу переміщення за маршрутом. За таких обставин отримуємо часовий інтервал, який надає оцінку значень критеріальної функції для обраного параметра $\alpha \in [0,1]$. Мінімальне значення буде визначати час за ідеальних умов руху, максимальне – за умов врахування впливу факторів, що погіршують тривалість проходження ділянок маршруту. У табл. 1 наведено результати розрахунків, отриманих при розв'язуванні задачі комівояжера для різних значень параметра $\alpha \in [0,1]$.

Таблиця 1 – **Результати розрахунків для нечіткої задачі комівояжера**

Значення параметра α \ Часовий інтервал	Min, год	Max, год
$\alpha = 1$	117	117
$\alpha = 0.75$	117	127
$\alpha = 0.5$	117	159
$\alpha = 0.25$	117	164

Висновки

В даній статті розглянуто метод імітації відпалу для розв'язання нечіткої задачі комівояжера, яка формулюється як задача пошуку маршруту відвідування заданої кількості міст без повторень з мінімальною тривалістю пересування.

Викладено зміст методу імітації відпалу, описано алгоритм формалізації методу. Сформульовано нечітку задачу комівояжера, у якій часові параметри пересування між містами задаються у вигляді правих нечітких чисел, величина носія в яких залежіть від різних зовнішніх умов та факторів.

Наведено результати розрахунків розв'язків задачі комівояжера у чіткій та нечіткій формах з різними параметрами зрізів нечітких чисел.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Зайченко Ю.П.* Дослідження операцій/ К.: Видавничий дім «Слово», 2006. – 816с.
2. *Гребеннік І.В., Чорна О.С., Макарова Е.Е.* Оптимізація лінійних функцій на множині циклічних перестановок з лінійними обмеженнями// Системи управління, навігації та зв'язку. - 2018. - №3(49). - С.67-72.
3. *Rai S. and Ettam R. K.* Simulation-based optimization using simulated annealing for optimal equipment selection within print production environments// Winter Simulations Conference (WSC), 2013. - Pp. 1097-1108.
4. Костенко О.М. Синтез оптимальних комбінаторних планів багатофакторного експерименту// Вісник полтавської державної аграрної академії. – 2016. - №1-2. – С.62-71.
5. *Нємцов М.В., Каук В.І.* Дослідження методів оптимізації, які використовуються у компіляторах коду [Online] – International Electronic Scientific Journal "Science Online". Available from: http://nauka-online.com/.
6. *Bablu Jana and Tapan Kumar Roy.* Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model // Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – V.21. – No.2. – P.243-268.
7. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // Inf. Contr. - 1965. - V.8. - P. 308-353.
8. *Zimmermman, H. J.* Application of Fuzzy Set Theory To Mathematical Programming // Information Sciences. - 1985. – 36. – P. 25-58.

Received (Надійшла) 10.07.2022
Accepted for publication (Прийнята до друку) 24.08.2022

On the application of the simulated annealing method for solving the fuzzy traveling salesman problem

V. Gavrilenko, K. Ivokhina, N. Rudoman

Abstract. This article discusses the annealing simulation method for solving the fuzzy traveling salesman problem, which is formulated as the problem of finding a route to visit a given number of cities without repetitions with a minimum travel time. The content of the annealing simulation method is presented, the method formalization algorithm is described. The axiomatics of fuzzy triangular numbers are given. A fuzzy traveling salesman problem is formulated, in which the time parameters of movement between cities are given in the form of right fuzzy numbers, the carrier value in which depends on various external conditions and factors. The results of calculations for solving the traveling salesman problem in clear and fuzzy forms with different parameters of slices of fuzzy numbers are presented.

Keywords: traveling salesman problem, simulated annealing method, algorithm, fuzzy numbers, level set, formalization of time intervals.