УДК 621.031 **doi: 10.26906/SUNZ.2021.4.016**

Є. І. Калінін, О. В. Коломійцев, А. О. Рибальченко

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна

ВЗАЄМНА КОРЕЛЯЦІЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ КООРДИНАТ БАГАТОВИМІРНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ

Анотація. Предметом досліджень статті є своєрідну поведінку взаємних кореляційних функцій узагальнених координат – наявність розриву першого роду при переході аргументу від його позитивних значення до негативних. Метою є оцінка можливості формування розриву парних та непарних складових кореляційної функції та обґрунтування даного явища. Застосовувані методи: співставлення двох функцій дійсних змінних на основі перетворення Фур'є, статистичні методи аналізу даних, теорія випадкових функцій, кореляційний аналіз. Отримані результати: побудова принципів отримання парних та непарних складових кореляційної функції багатовимірної лінійної системи з аналізом їх безперервності в узагальненому сенсі; запропоноване тлумачення подібних виразів як границі послідовності безперервних функцій, що забезпечує їх безперервність в узагальненому сенсі та усуває виниклу суперечливість в даному випадку. Практична значущість роботи полягає у побудові моделі взаємної кореляції узагальнених координат лінійної системи з урахуванням особливостей поведінки кореляційних функцій.

Ключові слова: кореляційний аналіз; багатовимірна лінійна система; парні та непарні складові; безперервність, випадкові величини.

Вступ

В теорії аналізу багатовимірних випадкових величин завдання кореляційного аналізу є важливими при побудові і реалізації багатьох систем контролю, моніторингу та діагностики. В процесі вирішення цих завдань визначення наявності та характеру статистичного взаємозв'язку досліджуваних випадкових величин є пріоритетним напрямком.

На підставі результатів кореляційного аналізу робляться висновки про наявність і характер функціональної залежності випадкових величин, перевагу використовуваних методів досліджень і запропонованих моделей для опису випадкових багатовимірних процесів.

Застосування класичного математичного апарату кореляційного аналізу широко використовується в припущенні про приналежність випадкового процесу, що спостерігається, багатовимірному нормальному закону розподілу.

На практиці такі передумови кореляційного аналізу виконуються далеко не завжди і, швидше за все, є зручною математичною ідеалізацією досліджуваних процесів.

Завдання оцінювання параметрів сигналів, що приймаються на фоні перешкод, є важливими при реалізації багатьох технічних систем, що мають відношення до статистичної обробки даних. Для їх розв'язку успішно використовуються добре відомі статистичні методи, такі як метод максимальної правдоподібності, метод моментів і ін. [1-3].

Використання даних методів не накладає принципових обмежень на вид розподілів досліджуваних випадкових процесів, однак на практиці широкого поширення набули гаусові моделі досліджуваних випадкових величин.

Таке припущення не завжди адекватно відображає реальні випадкові процеси, які є відмінними від гаусових [4-6], що в цілому призводить до зниження ефективності оцінювання параметрів досліджуваних випадкових процесів.

Окрім того, аналіз розв'язання кореляційних диференціальних рівнянь для багатовимірної лінійної системи виявив своєрідну поведінку взаємних кореляційних функцій узагальнених координат – наявність розриву першого роду при переході аргументу від його позитивних значення до негативних.

Явна суперечність цього явища існуючій думці про безперервний характер зміни кореляційних функцій спонукає провести більш ретельне дослідження.

Мета роботи – оцінка можливості формування розриву парних та непарних складових кореляційної функції та обґрунтування даного явища.

Завдання дослідження полягають у побудові принципів отримання парних та непарних складових кореляційної функції багатовимірної лінійної системи з аналізом їх безперервності в узагальненому сенсі.

Розв'язок кореляційних диференційних рівнянь для багатовимірної лінійної системи

Виходимо з того, що матриця спектральних щільностей узагальнених координат лінійної системи визначається залежністю виду:

$$S_{xx}(\omega) = \Phi(i\omega) S_{hh}(\omega) \Phi^{*}(i\omega)\,, \qquad (1)$$

де $S_{hh}(\omega)$ – матриця спектральних щільностей вектору збурюючих впливів; $\Phi(i\omega)$ – матриця частотних характеристик системи, а «*» позначає сполучення.

Окремі елементи матриці $S_{xx}(\omega)$ як наслідок структури наведеного перетворення (1) виявляються двох видів:

а) діагональними, які можуть бути приведені до форми виду:

$$S_{jj}^{xx}(\omega) = \left| \frac{P_{\mu}(i\omega)}{P_{\nu}(i\omega)} \right|^{2}, \ j = \overline{1,n}\,; \qquad (2)$$

б) іншими:

$$S_{jl}^{xx}(\omega)=\frac{P_\rho(i\omega)P_\sigma(i\omega)}{\left|P_\nu(i\omega)\right|^2},\; j,l=\overline{1,n};\; j\neq l, \qquad (3)$$

де $P_\nu(i\omega)$ – поліном ступеня ν відносно $i\omega$.

Оскільки чисельником наведеного виразу (2) є поліном, що містить лише парні ступені, то зворотне перетворення Фур'є, що дає відповідну кореляційну функцію, буде складатися тільки з парних функцій.

Так, якщо полюси знаменника – дійсні числа, то застосування теорії лишків до (2) призводить (при відсутності кратних полюсів) до залежності виду:

$$K_{jj}^{xx}(\tau)=\sum_{s=1}^{n}C_s e^{\lambda_s|\tau|}, \qquad (4)$$

де C_s – дійсний коефіцієнт.

Аналогічно парі комплексно-спряжених полюсів

$$\lambda_r=-\alpha_r\pm i\beta_r \qquad (5)$$

відповідають складові кореляційної функції

$$K_{jj}^{xx}(\tau)=e^{-\alpha_s|\tau|}\left(A_r\cos\beta_r\tau+B_r\sin\beta_r|\tau|\right), \qquad (6)$$

де A_r і B_r – числові коефіцієнти.

Відзначимо, що, для надання другому доданку (6) властивостей парної функції, в аргумент останньої доводиться вводити знак модуля.

Переходячи до аналізу виразу (3), представимо добуток, що входить в його чисельник, у вигляді суми двох поліномів

$$P'_{jl}(i\omega)\text{ і }P''_{jl}(i\omega),$$

в кожен з яких входять лише парні або непарні ступеня відповідно:

$$P_\rho(i\omega)P_\sigma(i\omega)=P'_{jl}(i\omega)+P''_{jl}(i\omega). \qquad (7)$$

Це дозволяє, використовуючи лінійність перетворення Фур'є, перед проведенням зворотного перетворення представити (3) у формі:

$$S_{jl}^{xx}(\omega)=\left|\frac{P_1(i\omega)}{P_\nu(i\omega)}\right|^2+\frac{P''_{jl}(i\omega)}{\left|P_\nu(i\omega)\right|^2}, \qquad (8)$$

де $\left|P_1(i\omega)\right|^2=P'_{jl}(i\omega)$.

Взаємна кореляційна функція, що отримана в результаті зворотного перетворення, буде складатися з двох частин:

$$K_{jl}^{xx}(\tau)=K'_{jl}(\tau)+K''_{jl}(\tau), \qquad (9)$$

причому першу з них складуть парні функції того ж типу, що (4) або (6) в залежності від виду полюсів знаменника.

Друга ж частина – $K''_{jl}(\tau)$ – описується непарними функціями, уявлення про вигляд яких може бути отримано на основі наступних міркувань.

Використовуючи непарність ступенів окремих членів поліному $P''_{jl}(i\omega)$, підінтегральний вираз в $K''_{jl}(\tau)$ представимо у вигляді добутку такого вигляду:

$$K''_{jl}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}i\omega\frac{P_2(i\omega)}{\left|P_\nu(i\omega)\right|^2}e^{i\omega\tau}d\omega, \qquad (10)$$

в якому $P_2(i\omega)$ – поліном, що містить лише парні ступені.

Але добутку частотного параметра $i\omega$ на зображення функції в просторі оригіналів відповідає похідна за аргументом τ від оригіналу цієї функції:

$$K''_{jl}(\tau)=\frac{d}{d\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_2(i\omega)}{\left|P_\nu(i\omega)\right|^2}e^{i\omega\tau}d\omega\right]. \qquad (11)$$

Тут враховано, що значення кореляційної функції на нескінченності тотожно дорівнюють нулю.

Оскільки підінтегральний вираз в (11) не відрізняється від (2), то, виконуючи перетворення, знову приходимо до доданків виду (4) або (6). Але похідна від цих функцій і, отже, самі функції повинні бути непарними.

Диференціювання не змінює виду функцій (4) або (6). Тому, слідуючи практиці штучного перетворення непарної функції в парну, що буда відмічена на прикладі синуса, запишемо

$$K''_{jl}(\tau)=\sum_s \operatorname{sgn}(\tau)C_s e^{\lambda_s|\tau|}, \qquad (12)$$

або

$$K''_{jl}(\tau)= \\ =\sum_s e^{-\alpha_s|\tau|}\left(\operatorname{sgn}(\tau)A_s\cos\beta_s\tau+B_s\sin\beta_s\tau\right), \qquad (13)$$

де

$$\operatorname{sgn}(\tau)=\begin{cases}1 & при\quad \tau>0,\\ 0 & при\quad \tau=0,\\ -1 & при\quad \tau<0.\end{cases} \qquad (14).$$

Звідси повний вираз для взаємної кореляційної функції (9) в найбільш загальному випадку буде мати вигляд

$$\begin{aligned}K_{jl}^{xx}(\tau)&=\sum_s(C_s+\operatorname{sgn}(\tau)C'_s)e^{\lambda_s|\tau|}+\\&+\sum_r\begin{bmatrix}\left(A_r+\operatorname{sgn}(\tau)A'_r\right)\cos\beta_s\tau+\\+\left(B_r+\operatorname{sgn}(\tau)B'_r\right)\sin\beta_s|\tau|\end{bmatrix}e^{-\alpha_r|\tau|},\end{aligned} \qquad (15)$$

де всі коефіцієнти – дійсні числа.

З (15) неважко бачити, що основна властивість взаємних кореляційних функцій

$$K_{jl}^{xx}(\tau)=K_{lj}^{xx}(-\tau) \qquad (16)$$

виконується, причому її виконання при $\tau=0$ досягається лише при правильному обліку сигнатури (14).

Доволі часто взаємні кореляційні функції практично отримують як результат зворотного перетворення Фур'є від відповідної спектральної щільності.

При цьому, природно, попередній розподіл на поліноми парних і непарних ступенів не проводять. Виникає лише завдання поділу доданків на парні і непарні складові у вже отриманому виразі для $K_{jl}^{xx}(\tau)$.

Завдання це вирішувалося в [8], і ми наводимо тільки його остаточний результат:

$$\begin{cases} K'_{jl}(\tau) = \dfrac{1}{2}(K_{jl}^{xx}(\tau) + K_{lj}^{xx}(\tau)), \\ K''_{jl}(\tau) = \dfrac{1}{2}(K_{jl}^{xx}(\tau) - K_{lj}^{xx}(\tau)). \end{cases} \quad (17)$$

Приклад розкладання кореляційної функції на парні і непарні складові та їх аналіз

Проілюструємо отримані результати найпростішим прикладом (рис. 1).

Стаціонарний випадковий процес впливає на тривимірну систему першого порядку, що описується диференційним рівнянням виду

$$\dot{z} - Wz = f\,, \quad (18)$$

де
$$W = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}; \quad (19)$$

z і f – вектори узагальнених координат і сил відповідно.

Перша, ненульова компонента вектору f має нульове математичне очікування і кореляційну функцію, яка описується виразом виду:

$$K_{11}^{ff}(\tau) = 10e^{-4|\tau|}. \quad (20)$$

Рівнянню (18) відповідає матриця частотних характеристик виду:

$$\Phi(p) = |pE - W|^{-1} =$$
$$= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} (p+2)^2+1 & -(p+3) & p+1 \\ -(p+3) & (p+2)^2-1 & p+1 \\ p+3 & -(p+3) & (p+2)^2-1 \end{vmatrix}, \quad (21)$$

де $p = i\omega$; $\Delta = (p+1)(p+2)(p+3)$; E – одинична матриця; «–1» в ступені позначає зворотну матрицю.

Використовуючи ненульовий елемент матриці спектральних щільностей вектору f

$$S_{11}^{ff}(\omega) = \frac{40}{\pi(\omega^2+16)} \quad (22)$$

за допомогою залежності (1) формуємо матрицю спектральних щільностей вектору узагальнених координат

$$S_{zz}(\omega) =$$
$$= \frac{40}{\delta}\begin{vmatrix} |\vartheta(p)|^2 & -(-p+3)\vartheta(p) & (-p+3)\vartheta(p) \\ -(p+3)\vartheta(-p) & |p+3|^2 & -|p+3|^2 \\ (p+3)\vartheta(-p) & -|p+3|^2 & |p+3|^2 \end{vmatrix}, \quad (23)$$

де
$$\vartheta(p) = (p+2)^2+1; \; \delta = \pi|(p+4)\Delta|^2. \quad (24)$$

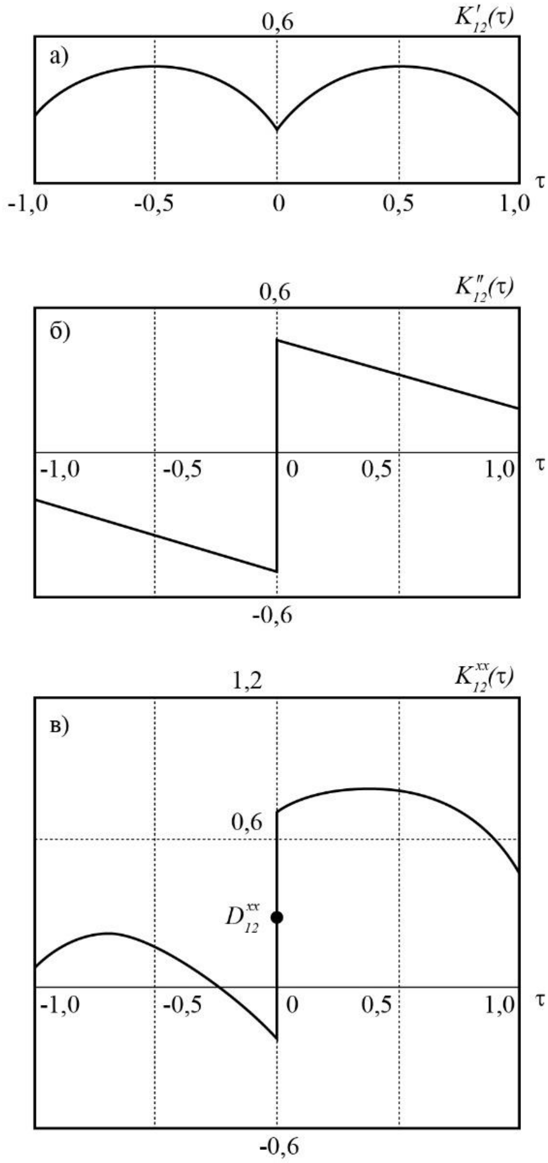

Рис. 1. Парна (а) та непарна (б) складові і загальний вигляд (в) доданків функції $K_{jl}^{xx}(\tau)$

З (23) видно, що недіагональні елементи дійсно можуть бути представлені у формі (8), наприклад у такому випадку:

$$S_{12}^{zz}(\omega) =$$
$$= \frac{40}{\pi}\left[\frac{p^2-15}{|(p+4)\Delta|^2} + \frac{p^3-7p}{|(p+4)\Delta|^2}\right], \quad (25)$$

хоча є й винятки (наприклад, такі матрицю спектральних щільностей: $S_{23}^{zz}(\omega)$ і $S_{32}^{zz}(\omega)$).

Зворотне перетворення Фур'є від елементів $S_{12}^{zz}(\omega)$ і $S_{21}^{zz}(\omega)$ дає такі взаємні кореляційні функції:

$$\begin{aligned} &K_{12}^{xx}(\tau) = \\ &\quad = -0,444e^{-\tau} + 0,333e^{-2\tau} - 0,381e^{-3\tau} + 0,198e^{-4\tau}, \\ &K_{21}^{xx}(\tau) = \\ &\quad = -1,888e^{-2\tau} + 2,476e^{-3\tau} - 0,881e^{-4\tau}. \end{aligned} \quad (26)$$

Використання операції (17) для виділення парних і непарних складових призводить до виразу такого вигляду:

$$K_{12}^{xx}(\tau) = -0,222e^{-|\tau|} - 0,777e^{-2|\tau|} + \\ +1,048e^{-3|\tau|} - 0,341e^{-4|\tau|} + \\ +\mathrm{sgn}(\tau)\cdot\begin{pmatrix} -0,222e^{-|\tau|} + 1,111e^{-2|\tau|} - \\ -1,429e^{-3|\tau|} + 0,540e^{-4|\tau|} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Залежності, що представлені на рис. 1, дають наочне уявлення про характер зміни парної (а), непарної (б) складових і в цілому (в) одного з доданків функції $K_{jl}^{xx}(\tau)$. Через D_{12}^{xx} позначена відповідна частина дисперсії

$$D_{12}^{xx} = K_{12}^{xx}(0) = K_{21}^{xx}(0). \quad (28)$$

Висновки

Розривність непарної складової (рис. 1, б) знаходиться в явному протиріччі з безперервністю реальних кореляційних функцій, що випливає з їх фізичної суті.

Необхідно відзначити, що причина подібної ситуації – порушень безперервності похідних таких аналітичних апроксимацій, як $e^{-\alpha|\tau|}$ і $e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau$ – полягає в особливостях математичного апарату, що застосовується при вирішенні диференціальних рівнянь.

Наукову новизну проведеного дослідження складає запропоноване тлумачення подібних виразів як границі послідовності безперервних функцій, що забезпечує їх безперервність в узагальненому сенсі та усуває виниклу суперечливість в даному випадку.

Практична значущість роботи полягає у побудові моделі взаємної кореляції узагальнених координат лінійної системи з урахуванням особливостей поведінки кореляційних функцій.

Перспективи дослідження можуть бути пов’язані із подальшим дослідженням поведінки кореляційних функцій з представленням останніх як границі послідовності.

Список літератури

1. Van Trees H. L., Bell K. L., and Tiany Z. (2013) *Detection Estimation and Modulation Theory*, 2nd Edition, Part I, Detection, Estimation, and Filtering Theory, John Wiley & Sons, New York.
2. Tuzlukov V. P. (2002) *Signal Processing Noise*, CRC Press LLC, Boca Raton.
3. Mourad Barkat (2005) *Signal Detection and Estimation*, Artech House, Boston.
4. Middleton D. (2012) *Non-Gaussian Statistical Communication Theory*, Jonn Willey & Sons, New Jersey.
5. Zhao Huihong, and Chenghui Zhang (2016) “Non-Gaussian noise quadratic estimation for linear discrete-time time-varying systems”, *Neurocomputing*, 174 (B), pp. 921- 927, DOI: https://doi.org/10.1016/J.NEUCOM.2015.10.015
6. Kunchenko Y. P. (2002) *Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random variables*. Germany, Aachen: Shaker Verlag.
7. Vokorokos L., Marchevský S., Ivchenko A., Palahina E., and Palahin V. (2016) “Parameters Estimation of Correlated non-Gaussian processes by the Method of Polynomial Maximization”, *IET Signal Processing*, pp. 313-319, DOI: https://doi.org/10.1049/iet-spr.2016.0142
8. Ahlen A., Sternad M. (1989) “Optimal deconvolution based on polynominal method”, *IEEE Trans. Acoust. Speech*, 37 (2), pp. 217–226.
9. Towghi N., Javidi B. (2001) Image recognition in the presence of non-Gaussian noise with unknown statistics, *J. Opt. Soc. Am.*, 18 (11), pp. 2744–2753, DOI: https://doi.org/10.1364/josaa.18.002744
10. Guo L., Wang H., Chai T. (2006) “Fault detection for non-linear non-Gaussian stochastic systems using entropy optimization principle”, *Trans. Inst. Meas. Control*, 28 (2), pp. 145–161, DOI: https://doi.org/10.1191/0142331206tm169oa
11. Huihong Zhao, Chenghui Zhang (2016) “Non-Gaussian noise quadratic estimation for linear discrete-time time-varying systems”, *Neurocomputing*, 174, pp. 921-927, DOI: https://doi.org/10.1016/j.neucom.2015.10.015

Received (Надійшла) 14.09.2021
Accepted for publication (Прийнята до друку) 27.10.2021

Cross-correlation of a multidimensional system

Yevhen Kalinin, Oleksii Kolomiitsev, Alina Rybalchenko

Annotation. The subject of research in the article is the peculiar behavior of the mutual correlation functions of generalized coordinates - the presence of a discontinuity of the first kind when the argument passes from its positive values to negative ones. **The goal** is to assess the possibility of forming a gap between the even and odd components of the correlation function and to substantiate this phenomenon. **Applied methods:** comparison of two functions of real variables based on the Fourier transform, statistical methods of data analysis, theory of random functions, correlation analysis. **The obtained results:** construction of principles for obtaining even and odd components of the correlation function of a multidimensional linear system with an analysis of their continuity in the general sense; the interpretation of such expressions is proposed as the limit of a sequence of continuous functions, which ensures their continuity in the general sense and eliminates the inconsistency that has arisen in this case. **The practical significance of the work** lies in the construction of a model of cross-correlation of generalized coordinates of a linear system, taking into account the peculiarities of the behavior of the correlation functions.

Keywords: correlation analysis; multidimensional linear system; even and odd components; continuity, random variables.