УДК 004.7 **doi: 10.26906/SUNZ.2021.2.096**

Л. Г. Раскін, О. В. Сіра, Ю. Л. Парфенюк

Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”, Харків, Україна

УПРАВЛІННЯ ПОСТАВКАМИ В УМОВАХ МАЛОЇ ВИБІРКИ ВИПАДКОВИХ ВИХІДНИХ ДАНИХ

Анотація. Розглянуто задачу відшукання оптимального плану транспортувань продукту в системі «постачальник - споживач» в ситуації, коли вартості транспортувань - випадкові величини. Сформульовано модель задачі. Запропоновано критерій оптимальності плану - ймовірність того, що сумарна випадкова вартість транспортувань перевищить заданий допустимий поріг. В умовах малої вибірки вихідних даних коректне відновлення щільності розподілу випадкової вартості транспортувань неможливе. Тому розглянуті варіанти аналітичного подання критерію для різних законів розподілу випадкової вартості транспортувань: гаусом, асиметричною і «найгіршою». Параметри «найгіршого» закону розподілу відшукуються методом континуального лінійного програмування. Для вирішення задачі запропонована ітераційна процедура, на кожному кроці якої вирішується задача квадратичного програмування. Обгрунтовано метод прискорення обчислювальної процедури, заснований на оптимізації дробово-нелінійної функції з лінійними обмеженнями. Показано, що оптимальний план перевезень визначається тільки значеннями математичного сподівання і дисперсії вартостей транспортувань, але не залежить від закону розподілу цих випадкових величин.

Ключові слова: транспортна задача лінійного програмування, випадкові значення вартостей транспортувань, дробово-нелінійна оптимізація.

Вступ

Канонічна транспортна задача лінійного програмування формується таким чином [1-4]. Задані пункти виробництва певного продукту $A_1, A_2, ..., A_m$ та пункти споживання цього продукту $B_1, B_2, ..., B_n$. Для кожного пункту виробництва A_i визначено об'єм a_i виробництва, $i = 1,\ 2, ..., m$, а для кожного пункту B_j - обсяг b_j споживання, $j = 1,\ 2, ..., n$. Крім того, передбачається, що відомі маршрути транспортування продукту від виробників до споживачів і задана відповідна матриця значень C_{ij} середньої вартості транспортування одиниці продукту $i = 1\ ,\ \ 2\ ,\ .\imath,$ $j = 1,\ 2, ..., n$. Потрібно знайти матрицю $X = (x_{ij})$ значень планованих обсягів транспортування, яка мінімізує

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

і задовольняє обмеженням

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\ ,\ i = 1,\ 2, ..., m\ , \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\ ,\ j = 1,\ 2, ..., n\ , \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\ . \qquad (4)$$

При цьому для урахування стохастичного характеру вартості транспортування вводиться набір середніх значень $(\bar{c}_{ij})$ вартостей для кожної пари постачальник - споживач, $i = 1,\ 2, ..., m$, $j = 1,\ 2, ..., n$. Тоді цільова функція (1), яка визначає сумарну середню вартість транспортувань, приймає вигляд

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_{ij} x_{ij}\ . \qquad (5)$$

Для обліку стохастичного характеру потреб також використовується набір середніх значень $(\bar{b}_j)$ цих величин. Тоді обмеження (3) приймуть вигляд

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge \bar{b}_j\ ,\ j = 1,\ 2, ..., n\ . \qquad (6)$$

У цій ситуації канонічна транспортна задача перетвориться на наступну: знайти план транспортувань $X = (x_{ij})$, мінімізуючий (5) та задовольняючий обмеженням (2), (4), (6). Отримана задача вирішується звичайним методом потенціалів [1-2]. Недоліки наведеної моделі завдання очевидні. По перше, в умовах великих значень дисперсій вихідних випадкових параметрів задачі її рішення в формі (2), (4) - (6) для кожної конкретної реалізації плану може виявитися незадовільним. По-друге, дисперсія оцінки результату (середнього значення критерію) в цих умовах буде неприйнятно великою, отже, критерій виявиться мало інформативним.

Удосконалення моделі (2), (4) - (6) доцільно здійснити в наступних напрямках. Як більш інформативного критерію ефективності транспортувань пропонується використовувати ймовірність того, що випадкові сумарні витрати не перевищать деякого заданого порогу [5]. Зрозуміло, що ця ймовірність залежить одночасно від значень математичних сподівань і дисперсій випадкових вартостей транспортувань для кожного з маршрутів і буде тим більшою, чим ці статистичні характеристики відповідних випадкових величин будуть менше. З іншого боку, раціональні значення потреби для кожного з пунктів споживання продукту, що впливають на план і вартість перевезень, визначаються рівнем попиту в цих конкретних пунктах. Оптимальні значення цих величин природно вибрати, мінімізуючи середні витрати, що виникають при зберіганні нереалізованого продукту, і можливі втрати від дефіциту в кожному з пунктів споживання. Відповідно до цього **мета статті -** розробка адекватної математичної моделі задачі управління перевезеннями і ефективних методів вирішення цього завдання.

Постановка задачі

Нехай за результатами попередніх досліджень для кожної пари (i, j) (виробник - споживач) визначені оцінки математичного сподівання m_{ij} та дисперсії σ_{ij}^2 випадкового значення вартості транспортування c_{ij} одиниці продукту. Приймемо, що щільності розподілу відповідних випадкових величин - гаусові. Тоді для плану транспортування $X=(x_{ij})$ випадкове значення сумарної вартості транспортувань $L(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ також має гаусів розподіл з параметрами

$$m_{\Sigma}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_{ij} \quad \text{і} \quad \sigma_{\Sigma}^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2 x_{ij}^2 .$$

При цьому ймовірність того, що випадкова сумарна вартість $L(x)$ перевищить припустимий поріг d_{Π}, визначається співвідношенням [6]:

$$P\left(L(x)\ge d_{\Pi}\right)= \\ =\int_{d_{\Pi}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Sigma}}\exp\left\{-\frac{(L(x)-m_{\Sigma})^2}{2\sigma_{\Sigma}^2}\right\}dL(x). \quad (7)$$

Введемо тепер для кожного пункту споживання j відповідну щільність розподілу $\phi_j(\theta_j)$ випадкового попиту θ_j, введемо для стислості, $Z_j=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}$. Тоді для плану транспортувань $X=(x_{ij})$ середнє значення витрат на зберігання нереалізованого продукту $R_j^{(1)}(Z_j)$, $R_j^{(2)}(Z_j)$ – середні втрати від дефіциту та середні сумарні втрати $R_j(Z_j)=R_j^{(1)}(Z_j)+R_j^{(2)}(Z_j)$ визначаються співвідношеннями

$$R_j^{(1)}(Z_j)=\alpha_j\int_0^{Z_j}\left(\sum_{i=1}^{m}x_{ij}-\theta_j\right)\phi_j(\theta_j)d\theta_j ;$$

$$R_j^{(2)}(Z_j)=\beta_j\int_{Z_j}^{\infty}\left(\theta_j-Z_j\right)\phi_j(\theta_j)d\theta_j ;$$

$$R_j(Z_j)=\alpha_j\times \\ \times\int_0^{Z_j}(Z_j-\theta_j)\phi_j(\theta_j)+\beta_j\int_{Z_j}^{\infty}(\theta_j-Z_j)\phi_j(\theta_j)d\theta_j, \quad (8)$$

де α_j - вартість зберігання одиниці товару у j-му пункті споживання, $j=1, 2,...,n$, β_j - втрати за рахунок дефіциту одиниці продукту в j-му пункті споживання.

Визначимо тепер необхідне сумарне значення продукту що доставляється Z_j в j-й пункт споживання, мінімізуюче сумарні втрати (8), отримаємо

$$R_j(Z_j)=\alpha_j\left[\int_0^{Z_j}Z_j\phi_j(\theta_j)d\theta_j-\int_0^{Z_j}\theta_j\phi_j(\theta_j)d\theta_j\right]+ \\ +\beta_j\left[\int_{Z_j}^{\infty}\theta_j\phi_j(\theta_j)d\theta_j-\int_{Z_j}^{\infty}Z_j\phi_j(\theta_j)d\theta_j\right]= \\ =\alpha_jZ_j\int_0^{Z_j}\phi_j(\theta_j)d\theta_j-\alpha_j\int_0^{Z_j}\theta_j\phi_j(\theta_j)d\theta_j+ \\ +\beta_j\int_{Z_j}^{\infty}\theta_j\phi_j(\theta_j)d\theta_j-\beta_jZ_j\left(1-\int_0^{Z_j}\phi_j(\theta_j)d\theta_j\right)= \\ =(\alpha_j+\beta_j)Z_j\int_0^{Z_j}\phi_j(\theta_j)d\theta_j- \\ -\alpha_j\int_0^{Z_j}\theta_j\phi_j(\theta_j)d\theta_j+\beta_j\int_{Z_j}^{\infty}\theta_j\phi_j(\theta_j)d\theta_j-\beta_jZ_j. \quad (9)$$

Далі отримаємо

$$\frac{dR_j(Z_j)}{dZ_j}=(\alpha_j+\beta_j)\int_0^{Z_j}\phi_j(\theta_j)d\theta_j+(\alpha_j+\beta_j)\times \\ \times Z_j\phi_j(Z_j)-\alpha_jZ_j\phi_j(Z_j)-\beta_jZ_j\phi_j(Z_j)-\beta_j= \\ =(\alpha_j+\beta_j)\int_0^{Z_j}\phi_j(\theta_j)d\theta_j-\beta_j=0,$$

звідки

$$\int_0^{Z_j}\phi_j(\theta_j)d\theta_j=\frac{\beta_j}{\alpha_j+\beta_j}. \quad (10)$$

Отримане рівняння щодо Z_j завжди вирішується чисельно [7], однак, у багатьох випадках легко отримати аналітичне рішення. Нехай, наприклад, у важливому для практики окремому випадку реалізації швидкопсувних продуктів щільність розподілу попиту визначається законом Релея

$$\phi_j(\theta_j)=\left(\theta_j/\sigma_j^2\right)\cdot\exp\left\{-\theta_j^2/\left(2\sigma_j^2\right)\right\} .$$

Тоді

$$\int_0^{Z_j}\frac{\theta_j}{\sigma_j^2}\exp\left\{-\frac{\theta_j^2}{2\sigma_j^2}\right\}d\theta_j=-\int_0^{Z_j}d\left(e^{-\theta_j^2/2\sigma_j^2}\right)=e^{-Z_j^2/2\sigma_j^2} .$$

При цьому, з урахуванням (10),

$$e^{-Z_j^2/2\sigma_j^2}=\beta_j/(\alpha_j+\beta_j);\ -Z_j^2/2\sigma_j^2=\ln\left(\beta_j/(\alpha_j+\beta_j)\right);$$

$$Z_j^* = \sigma_j \sqrt{2}\left(\ln\left(\left(\alpha_j + \beta_j\right)/\beta_j\right)\right)^{1/2}.$$

Таким чином, в цьому випадку задача управління перевезеннями в системі «постачальники - споживачі» в умовах невизначеності зведена до наступної: знайти план $X = (x_{ij})$, здатний мінімізувати (7) і задовольняючий (2), (4), а також

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = Z_j^{(0)}, \; j = 1, \; 2, ..., n. \qquad (11)$$

де $Z_j^{(0)}$ - вирішення рівняння (10)

Основні результати

Розробка методу розв'язання задачі управління перевезеннями. Трансформуємо співвідношення (7).

$$\int_{d_\Pi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Sigma} \exp\left\{-\left(L(x) - m_\Sigma\right)^2 / 2\sigma_\Sigma^2\right\} dL(x) \underset{(L(x)-m_\Sigma)/\sigma_\Sigma = u}{=} \int_{(d_\Pi - m_\Sigma)/\sigma_\Sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du. \qquad (12)$$

Завдання мінімізації (12) еквівалентне задачі максимізації

$$J(x) = \left(d_\Pi - m_\Sigma\right)/\sigma_\Sigma = \left(d_\Pi - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_{ij}\right) \Bigg/ \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_{ij}^2} =$$

$$= \left(\frac{d_\Pi}{A} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_{ij}\right) \Bigg/ \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_{ij}^2} = \qquad (13)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d_\Pi}{A} - m_{ij}\right) x_{ij} \Bigg/ \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_{ij}^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \Bigg/ \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_{ij}^2}; \quad A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij};$$

Можливі методи вирішення отриманої дрібно-лінійної задачі оптимізації описані в [5]. З них найбільш ефективною використовує технологію вирішення завдань з дрібно - квадратичною цільовою функцією і лінійними обмеженнями по типу транспортних. Разом з тим, слід зазначити, що отримувані при вирішенні цього завдання результати не можна вважати абсолютно бездоганними, так як в умовах малої вибірки вихідних даних прийнята гіпотеза про нормальність закону розподілу випадкових вартостей транспортувань не може бути прийнята або відхилена з необхідним рівнем довіри. З метою поліпшення якості використовуваної моделі в розглянутих задачах транспортної логістики доцільно враховувати характерну особливість спостережуваних при цьому випадкових величин - щільність їх розподілу, як правило, має негативну асиметрію. Для опису таких розподілів використуємо співвідношення [8]

$$f(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\left(1 + \theta\, sign(x-m)\right)\right\}, \qquad (14)$$

яке зручно представити у вигляді

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma_1^2}\right\}, \; x \le m, \; \sigma_1 = \dfrac{\sigma}{\sqrt{1-\theta}}, \\ \dfrac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma_2^2}\right\}, \; x > m, \; \sigma_2 = \dfrac{\sigma}{\sqrt{1+\theta}}. \end{cases}$$

В [8] введені такі визначення: m - параметр, що визначає математичне сподівання, σ^2 - параметр, що визначає дисперсію x, θ - параметр, що визначає асиметрію x, A - нормуючий коефіцієнт,

$$A = 2\Big/\left(1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}\right).$$

Відзначимо, що наведені найменування для m та σ^2 не цілком точні, так як істинні значення математичного сподівання і дисперсії випадкової величини з розподілом (14) залежать від θ і можуть суттєво відрізнятися від m та σ^2. Проілюструємо це:

$$M[x] = 2\Big/\left(1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}\right) \cdot \left[\int_{-\infty}^{m} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-(x-m)^2 \big/ \left(2\sigma_j^2\right)\right\} dx + \int_{m}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-(x-m)^2 \big/ \left(2\sigma_j^2\right)\right\} dx\right] =$$

$$= \frac{2}{1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sqrt{1-\theta}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \exp\left\{-(x-m)^2 \big/ \left(2\sigma_j^2\right)\right\} dx_1 + \frac{1}{\sqrt{1+\theta}} \int_{m}^{\infty} \frac{x\sqrt{1-\theta}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \exp\left\{-(x-m)^2 \big/ \left(2\sigma_j^2\right)\right\} dx =\right.$$

$$= \frac{2}{1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} \int_{-\infty}^{m} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-(x-m)^2 \big/ \left(2\sigma_j^2\right)\right\} dx + \frac{1}{\sqrt{1+\theta}} \int_{m}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-(x-m)^2 \big/ \left(2\sigma_j^2\right)\right\} dx =\right.$$

$$= \frac{2}{1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} \cdot J_1 + \frac{1}{\sqrt{1+\theta}} \cdot J_2\right]; \; J_1 = \int_{-\infty}^{m} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-(x-m)^2 \big/ \left(2\sigma_j^2\right)\right\} dx \underset{(x-m)/\sigma_1 = u}{=} \int_{-\infty}^{0} \frac{u\sigma_1 + m}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du =$$

$$= \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} u e^{-u^2/2} du + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2} du = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} -d\left(e^{-u^2/2}\right) + \frac{m}{2} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-u^2/2}\Big|_{-\infty}^{0}\right) + \frac{m}{2} = -\frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{m}{2};$$

$$J_2 = \int_{m}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_2^2}\right\} dx \underset{(x-m)/\sigma_2 = u}{=} \int_{0}^{\infty} \frac{u\sigma_2 + m}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} u e^{-u^2/2} du + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-u^2/2} du =$$

$$= \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} -d\left(e^{-u^2/2}\right) + \frac{m}{2} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-u^2/2}\Big|_0^{\infty}\right) + \frac{m}{2} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} + \frac{m}{2}; \quad M[x] = \frac{2}{1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}} \times$$

$$\times\left[-\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\cdot\frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{m}{2\sqrt{1-\theta}} + \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}\cdot\frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} + \frac{m}{2\sqrt{1+\theta}}\right] = \left[-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}(1-\theta)} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}(1+\theta)} + \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} + \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{2}{1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}} = m - \frac{2}{1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}}\cdot\frac{2\theta\sigma}{\sqrt{2\pi}\left(1-\theta^2\right)} = m - \frac{4\theta\sigma}{\sqrt{2\pi}\left(1-\theta^2\right)\left(1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}\right)}. \quad (15)$$

Отриманий досить складний вираз для M[x] ускладнює розрахунок точного значення дисперсії x. Тому обмежимося визначенням середнього значення квадрата відхилення випадкової величини x від m:

$$M\left[(x-m)^2\right] = \frac{2}{1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}}\cdot\left[\int_{-\infty}^{m} \frac{(x-m)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_1^2}\right\}dx + \int_{m}^{\infty} \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_2^2}\right\}dx\right] = \frac{2}{1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\int_{-\infty}^{m} \frac{(x-m)^2\sqrt{1-\theta}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_1^2}\right\}dx + \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}\int_{m}^{\infty} \frac{(x-m)^2\sqrt{1-\theta}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_2^2}\right\}dx\right] = \frac{2}{1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\int_{-\infty}^{m} \frac{(x-m)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_1^2}\right\}dx + \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}\int_{m}^{\infty} \frac{(x-m)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_2^2}\right\}dx = \frac{2}{1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}I_1 + \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}I_2\right];$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{m} \frac{(x-m)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_1^2}\right\}dx \underset{(x-m)/\sigma_1=u}{=} \int_{-\infty}^{0} \frac{u^2\sigma_1^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du = \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} u\left(ue^{-u^2/2}du\right) = \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-ue^{-u^2/2}\Big|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2}du\right) = \frac{\sigma_1^2}{2\sqrt{2\pi}};$$

$$I_2 = \int_{m}^{\infty} \frac{(x-m)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_2^2}\right\}dx \underset{(x-m)/\sigma_2=u}{=} \int_{0}^{\infty} \frac{u^2\sigma_2^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du = \frac{\sigma_2^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} u\left(ue^{-u^2/2}du\right) = \frac{\sigma_2^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-ue^{-u^2/2}\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-u^2/2}du\right) = \frac{\sigma_2^2}{2\sqrt{2\pi}};$$

$$M\left[(x-m)^2\right] = \frac{2}{1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}}\cdot\left[\frac{\sigma_1^2}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\theta}} + \frac{\sigma_2^2}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1+\theta}}\right] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-\theta} + \frac{1}{1-\theta} - \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{1-\theta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\right). \quad (16)$$

Значення статистичних характеристик випадкової величини x, обчислювані відповідно до (15), (16) помітно відрізняються від m та σ^2. Тому перейменуємо їх наступним менш зобов'язуючим чином: m - параметр, що характеризує положення розподілу $\phi(x)$, він визначає модальне значення x; σ^2 - параметр, що характеризує форму розподілу $\phi(x)$, він визначає варіацію щодо модального значення. Відзначимо, що оцінки значень параметрів m, σ_1^2, σ_2^2, необхідні для опису розподілу (14), легко отримати методом максимальної правдоподібності. Використовуємо тепер співвідношення (14) для розрахунку критерію ефективності транспортувань (17):

$$P\left(L(x) \geq d_\Pi\right) = \int_{d_\Pi}^{\infty} f\left(L(x)\right)dx = \int_{d_\Pi}^{\infty} \frac{2}{\left(1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}\right)\sqrt{2\pi}\sigma_\Sigma}\exp\left\{\frac{\left(L(x) - m_\Sigma\right)^2}{2\sigma_\Sigma^2}\left(1 + \theta sign\left(t(x) - m_\Sigma\right)\right)\right\}dx(x) =$$

$$= \frac{2}{\left(1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}\right)\sqrt{1+\theta}}\int_{d_\Pi}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\theta}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_\Sigma}\exp\left\{-\left(L(x) - m_\Sigma\right)^2\Big/\left(2\frac{\sigma_\Sigma^2}{1+\theta}\right)\right\}dL(x) \underset{(x-m_\Sigma)\sqrt{1+\theta}/\sigma_\Sigma=u}{=}$$

$$\frac{2}{\left(1/\sqrt{1-\theta} + 1/\sqrt{1+\theta}\right)\sqrt{1+\theta}}\cdot\int_{(d_\Pi - m_\Sigma)\sqrt{1+\theta}/\sigma_\Sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du; \quad s_{ij} = d_\Pi/A - m_{ij}; \quad (17)$$

$$F(x) = \frac{\left(d_\Pi - m_\Sigma\right)\sqrt{1+\theta}}{\sigma_\Sigma} = \sqrt{1+\theta}\cdot\left(d_\Pi - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_{ij}\right)\Bigg/\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2x_{ij}^2} = \sqrt{1+\theta}\cdot\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}s_{ij}^2x_{ij}^2\Bigg/\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2x_{ij}^2.$$

Мінімізація (17) еквівалента максимізації що, еквівалентно максимізації (13). Це означає, що оптимальний план перевезень для випадку коли випадкові вартості розподілені відповідно до асиметричної щільності (14) буде збігатися з планом, отриманим для нормального розподілу. У зв'язку з цим принципову важливість здобуває питання про те, чи залежить план транспортувань від закону розподілу вартості транспортувань за умови, що основні статистичні характеристики цих випадкових величин (m та σ^2) фіксовані. Для відповіді на це питання попередньо знайдемо «найгіршу» щільність розподілу, для якої ймовірність перевищення допустимого порогу буде максимальною, і потім оптимальний план для цієї ситуації. При цьому виникає наступна задача: знайти щільність розподілу випадкової величини з заданими значеннями m та σ^2, для якої ймовірність попадання в заданий інтервал буде максимальною. Це завдання континуального лінійного програмування [9]. Введемо для стислості змінну $V = 2(x)$. Формальна постановка відповідної оптимізаційної задачі має вигляд:

знайти щільність розподілу $g(v)$ випадкової величини V, що задовольняє умовам

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(v)dv = n\,, \tag{18}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} vg(v)dx = m\,, \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 g(v)dv = \sigma^2\,, \tag{20}$$

для якої ймовірність потрапляння до інтервалу $[d_{\Pi},\infty)$, дорівнює

$$p(v \ge d_{\Pi}) = \int_{d_{\Pi}}^{\infty} g(v)dv\,, \tag{21}$$

буде максимальною. В [9] показано, що рішення слід шукати в класі лінійних комбінацій дельта - функцій Дірака, тобто воно має вигляд

$$g(v) = \sum_{i=1}^{m} Z_i \delta(v - v_i)\,.$$

Розроблена і обґрунтована оптимізаційна процедура, описана в [9], стосовно до задачі (18) - (21) приводить до такого результату:

$$g(v) = \frac{(d_{\Pi}-m)^2}{\sigma^2 + (d_{\Pi}-m)^2}\delta\left(v - \frac{m^2+\sigma^2 m d_{\Pi}}{m - d_{\Pi}}\right) + \frac{\sigma^2}{\sigma^2+(d_{\Pi}-m)^2}\delta(v - d_{\Pi}). \tag{22}$$

Отримана щільність розподілу (22) є «найгіршою» в тому сенсі, що ймовірність попадання випадкової сумарної вартості транспортувань $L(x)$ в неприпустимий інтервал $[d_{\Pi},\infty)$ буде найбільшою в порівнянні з відповідними можливостями для будь-яких інших щільностей розподілу з фіксованими значеннями m та σ^2. При цьому вірогідність попадання в цей інтервал дорівнює коефіцієнту при другому доданку в співвідношенні (22).

Проведемо порівняння значень ймовірностей потрапляння в неприпустимий інтервал для трьох розподілів випадкових величин з заданими значеннями математичного сподівання і дисперсії. Розрахунок проведемо за такими формулами:

– для Гаусового розподілу

$$P_{\Gamma}(L(x) \ge d_{\Pi}) = = \int_{d_{\Pi}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dx;\ ;$$

– для асиметричного розподілу

$$P_a(L(x) \ge d_{\Pi}) = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} + \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}}\int_{d_{\Pi}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\ ;\ \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}(1+\theta)sign(x-m)\right\}dx;$$

– «найгіршого» розподілу

$$P_H(L(x) \ge d_{\Pi}) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (d_{\Pi}-m)^2}\,. \tag{23}$$

Нехай:

$$m = 10,\ \sigma = 3,;$$

$$d_{\Pi} = 12\,;\ 14\,;\ 16\,;\ 18\,,$$

$$\theta = -0{,}1;\ \text{-0,3; -0,5; -0,8; -0,9.}$$

Результати розрахунків зведемо в табл. 1.

Таблиця 1 – **Значень ймовірностей влучення в інтервал $[d_{\Pi},\infty)$ для різних розподілів випадкових величин**

d_{Π}	Гаусів розподіл	Асиметричний розподіл					«Найгірший» розподіл
		$\theta=-0{,}1$	$\theta=-0{,}3$	$\theta=-0{,}5$	$\theta=-0{,}8$	$\theta=-0{,}9$	
12	0,26	0,28	0,32	0,35	0,42	0,44	0,69
14	0,09	0,10	0,11	0,12	0,14	0,15	0,36
16	0,025	0,027	0,03	0,034	0,04	0,045	0,21
18	0,005	0,005	0,006	0,007	0,008	0,10	0,123

Порівняння цих результатів дозволяє зробити наступні висновки.

1. Гаусів розподілдає найбільш оптимістичний прогноз для ймовірності потрапляння в неприпустимий інтервал.

2. Асиметричне розподілення краще прогнозує небезпеку неприпустимою ситуації.

3. «Найгірше» розподіл дає песимістичний прогноз, для якого ймовірність небезпеки в рази перевищує відповідну ймовірність для нормального розподілу.

Відповідно до цього, на перший погляд, видається очевидною необхідність відшукання оптимального плану транспортувань в найгірших умовах, тобто рішення мінімаксної задачі. Разом з тим, вище вже зверталась увага на те, що аналітичний опис критеріїв оптимізації для гаусова та асиметричного розподілів (формули (13) і (17)) з точністю до константи збігаються. Розглянемо тепер аналітичний вираз для критерію оптимальності в разі найгіршого розподілу. Так як

$$\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\left(d_\Pi-m\right)^2}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{d_m-m}{\sigma}\right)^2},$$

то мінімізація (23) еквівалентно максимізації $\left(d_\Pi-m\right)/\sigma$, що знову збігається з (13) та (17).

Звідси випливає: оптимальний план перевезень визначається тільки основними статистичними характеристиками вартостей транспортувань і не залежить від законів розподілу цих випадкових величин.

Найбільш актуальні напрямки подальших досліджень пов'язані з розглядом поставленої в роботі задачі в умовах, коли вихідні дані визначені нечітко [10-13] або неточно [14]. Можливі підходи до вирішення виникаючих при цьому задач запропоновані в [15,16].

Висновки

1. Розглянуто методи вирішення транспортних задач з випадковою вартістю транспортувань в умовах малої вибірки спостережень. Досліджена ситуація, коли вихідного статистичного матеріалу досить тільки для оцінки математичних сподівань і дисперсій випадкових значень вартості.

2. Показано, що задача може бути зведена до оптимізації дрібно - квадратичної цільової функції з лінійними обмеженнями.

3. Отримані аналітичні описи задачі для різних типів законів розподілу випадкової вартості транспортувань. Показано, що у всіх випадках задача оптимізації транспортувань зводиться до однієї і тієї ж формальної моделі.

4. При цьому результат рішення задачі (оптимальний план перевезень) залежить тільки від значень основних статистичних характеристик (математичне сподівання і дисперсія), випадкових величин вартості транспортувань, але не від їх законів розподілу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Данциг Дж.Б. Линейное программирование, его применения и обобщения. – М., 1966. – 600с
2. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Сов. радио, 1969. 382 с.
3. Миротин Л.Б., Ташбаев Ы.Э. Логистика для предпринимателя. – М.: ИНФРА, 2002. – 252 с
4. Раскин Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления. – М., 1976. – 344с
5. Серая О.В. Многомерные модели логистики в условиях неопределенности.-.Х.: ВОП Стеценко,-512 с
6. Джонсон Дж. Логистика: пер. с англ./ Дж. Джонсон, Д.Вуд, Д. Вордлоу, П. Мэрфи. – М.: «Вильямс». – 2004. – 624с
7. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ. – К.: Наукова думка, 1983. – 583с
8. Серая О.В. Комбинированная процедура оценивания параметров многофакторного уравнения регрессии для малой выборки /О.В. Серая, Л.Г. Раскин, В.В. Карпенко – Х.: Вестник НТУ «ХПИ», 2003. -№18. – С. 75 – 78
9. Раскин Л. Г., Кириченко И. О. Континуальное линейное прграммирование. – Х.: ВИВВ, 2005. – 175 с
10. Zadeh L. Fuzzy Sets, Information and Control, 1965, vol. 8. p. 338-353
11. Раскин Л.Г. Нечеткая математика: моногр. / Л.Г. Раскин, О.В. Серая. – Х.: Парус, 2008. – 352с
12. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике: Пер. с франц.-М.: Радио и связь, 1990. – 286с
13. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с франц. – М.: Радио и связь, 1982. – 486с
14. Pawlak Z. Rough sets, International Journal of Information and Computer Sciences, vol.11, No.5, 341-356, 1982.
15. Lev Raskin, Oksana Sira. Method of solving fuzzy problems of mathematical programming//Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Vol. 5, Issue 4. – P. 23–28. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.81292
16. Lev Raskin, Oksana Sira. Fuzzy models of rough mathematics//Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Vol. 6, Issue 4. – P. 53–60. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.86739

Received (Надійшла) 16.03.2021
Accepted for publication (Прийнята до друку) 28.04.2021

Supply management in terms of small sample random output data

Lev Raskin, Oksana Sira, Yurii Parfenyuk

Abstract. Considered problem of finding the optimal product transportation plan in "supplier - consumer" system in a situation where the cost of transportation - random variables. The model of the problem is formulated. Offered criterion optimality of the plan - probability that the total random cost of transportations will exceed the set admissible threshold. In the conditions of a small initial data sample correct restoration of distribution density of casual transportations cost is impossible. Therefore, variants of the analytical representation of the criterion for different distribution laws of the random value of transportation are considered: Gaussian, asymmetric and "worst". The parameters of the "worst" distribution law are found by the method of continuous linear programming. To solve the problem, an iterative procedure is proposed, at each step of which the quadratic programming problem is solved. The acceleration method of computational procedure based on optimization of fractional - nonlinear function with linear constraints is substantiated. It is shown that the optimal transportation plan is determined only by the values of mathematical expectation and variance of transportation costs, but does not depend on the distribution law of these random variables.

Keywords: Transport problem of linear programming, random values of transportation costs, fractional - nonlinear optimization.