

С. В. Гаєвський<sup>1</sup>, С. М. Балакірева<sup>2</sup>, І. П. Кулаков<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету, Кропивницький, Україна

<sup>2</sup>Харківський національний університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків, Україна

<sup>3</sup>Командування Сил Логістики Збройних Сил України, Київ, Україна

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПОКАЗНИКІВ ЗАЛИШКОВОГО РЕСУРСУ НЕВІДНОВЛЮВАЛЬНИХ КОМПЛЕКТУЮЧИХ ВИРОБІВ РАДІОЕЛЕКТРОННОЇ СИСТЕМИ ЛІТАКА

**Анотація.** Предметом вивчення в статті є процеси функціонування радіоелектронної системи сучасного літака, її комплектуючих елементів та функціональних вузлів як об'єкта визначення та розрахунку показників залишкового ресурсу. **Метою** є вдосконалення існуючого математичного апарату, що застосовується для розрахунку показників залишкового ресурсу невідновлювальних комплектуючих виробів радіоелектронної системи літака. **Завдання:** Розробити математичні моделі для розрахунку показників залишкового ресурсу невідновлювальних комплектуючих виробів радіоелектронної системи літака. Аналізованими **методами** та **моделями** є: аналітичний метод розрахунку показників залишкового ресурсу, моделі для показників залишкового ресурсу невідновлюваного об'єкта РЕС. Отримані такі **результати**. Обгрунтовано доцільність використання для вирішення завдань продовження ресурсу показників залишкового ресурсу невідновлюваних виробів: середнього залишкового ресурсу, гамма-процентного залишкового ресурсу, функції розподілу залишкового ресурсу. **Висновки.** Отримано розрахункові співвідношення для показників залишкового ресурсу для невідновлювальних виробів при різних функціях розподілу напрацювання до ресурсного відмови.

**Ключові слова:** залишковий ресурс, залишкове напрацювання, літак, математична модель, показник, радіоелектронна система, технічний стан.

### Вступ

**Постановка проблеми у загальному вигляді.** Запропонована в [1, 2] схема розрахунку показників залишкового ресурсу радіоелектронної системи (РЕС) літака передбачає розбиття всіх комплектуючих виробів (КВ), функціональних пристроїв (ФП) і функціональних систем (ФС) РЕС літака на невідновлювані або відновлювані з різною глибиною відновлення, з безперервним або періодичним контролем технічного стану, з кінцевим або необмеженим числом відмов протягом призначеного строку служби, і розрахунок показників залишкового ресурсу (ЗР) для виділених типів КВ, потім для ФП і ФС.

**Аналіз літератури.** У науково-технічній літературі відповідне науково-методичне забезпечення для вирішення вказаних вище завдань не розроблено досить повно, є роботи [3-12], в яких розглядаються математичні моделі повних відновлень, мінімальних і неповних відновлень. Однак їх застосування до розв'язання задач продовження ресурсів літакового парку практично відсутнє.

Нижче розробляються математичні моделі для розрахунку показників залишкового ресурсу невідновлювальних КВ, відновлюваних ФП РЕС літака для повних, неповних і мінімальних відновлень з кінцевим числом відновлень і безперервним контролем технічного стану.

У розглянутих математичних моделях під ресурсом розуміється «технічний ресурс», як сумарне напрацювання виробу від початку його експлуатації або його відновлення після ремонту до переходу в граничний стан. Під залишковим ресурсом відповідно до [1] розуміється сумарне напрацювання виробу

бу від моменту контролю його технічного стану до переходу в граничний стан.

**Метою статті** є розробка математичних моделей для розрахунку показників залишкового ресурсу невідновлювальних комплектуючих виробів радіоелектронної системи літака.

### Основна частина

**Залишковий ресурс невідновлювальних комплектуючих виробів і математичні моделі для розрахунку їх показників.** Розглянуті нижче математичні моделі для показників залишкового ресурсу невідновлюваного об'єкта в повному обсязі поширюються на залишковий термін служби і залишковий термін зберігання.

Нехай  $\xi$  - напрацювання виробу від початку експлуатації до переходу його в граничний стан, тобто  $\xi$  - напрацювання виробу до ресурсної відмови. Тоді залишковий ресурс  $\xi_\tau$  після моменту контролю його технічного стану  $\tau$  визначається як

$$\xi_\tau = \begin{cases} \xi - \tau, & \text{якщо } \xi > \tau, \\ 0, & \text{якщо } \xi \leq \tau. \end{cases} \quad (1)$$

У задачах продовження ресурсу під моментом часу  $\tau$  розуміють, як правило, призначений ресурс. Очевидно, що величина  $\xi_\tau$  є випадковою, тому в якості показників залишкового ресурсу розглядаються її числові характеристики: «середній залишковий ресурс»  $R(\tau)$  і «гамма-процентний залишковий ресурс»  $R_\gamma(\tau)$ . Більш загальною характеристикою залишкового ресурсу є функція розподілу залишкового ресурсу, тобто

$$F_\tau(t) = P\{\xi - \tau \leq t / \xi > \tau\} = P\{\tau < \xi \leq t + \tau\} / P\{\xi > \tau\},$$

або 
$$F_\tau(t) = (F(\tau + t) - F(\tau)) / P(\tau). \quad (2)$$

Відповідна ймовірність безвідмовної роботи

$$P_\tau = 1 - F_\tau(t) = P(\tau + t) / P(\tau) \quad (3)$$

Величина середнього залишкового ресурсу

$$R(\tau) = \frac{1}{P(\tau)} \int_\tau^\infty P(x) dx \quad (4)$$

де  $P(x)$  – ймовірність безвідмовної роботи виробу протягом напрацювання  $x$ .

Можна показати, що математичне сподівання випадкової величини  $\xi_\tau$  дорівнює величині  $R(\tau)$ :

$$M[\xi_\tau] = R(\tau), \quad (5)$$

і визначення середнього ЗР за формулами (4) і (5) еквівалентні.

Показник середнього ЗР не слід плутати з величиною залишкового середнього ресурсу, що дорівнює  $(M[\xi] - \tau)$  і що є математичним очікуванням безумовної випадкової величини  $\Theta = \xi - \tau$ . Між цими величинами має місце наступна нерівність:

$$R(\tau) \geq M[\xi] - \tau.$$

Для експоненціального закону розподілу напрацювання до ресурсної відмови  $P(x) = e^{-\lambda \cdot x}$  і згідно з формулою (3.4)  $R(\tau) = R(0) = 1/\lambda$ , тобто середній ЗР дорівнює середньому ресурсу, що безпосередньо випливає з формули

$$R(0) = \frac{1}{P(0)} \int_0^\infty P(x) dx = \frac{1}{\lambda}.$$

З наведеного співвідношення випливає, що показник «середній залишковий ресурс» є узагальненням показника довговічності – «середній ресурс».

Геометричний сенс показника  $R(\tau)$  – площа під кривою  $P(x)/P(\tau)$ , де  $\tau < x < \infty$  (рис. 1).

Знайдемо величину середнього ресурсу  $m_\tau$ , витраченого виробом по досягненню напрацювання («віку»)  $\tau$ , і його зв'язок з величиною середнього ЗР. Маємо:

$$m_\tau = \tau \cdot P(\tau) + \int_0^\tau t \cdot f(t) dt = \tau \cdot P(\tau) - \int_0^\tau t dP(t).$$

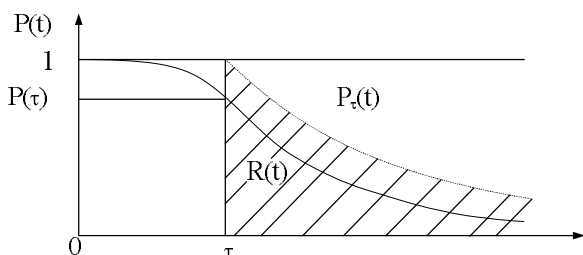


Рис. 1. Пояснення до геометричного сенсу показника  $R(\tau)$

В результаті перетворень отримаємо:

$$m_\tau = \int_0^\tau P(t) dt. \quad (6)$$

Запишемо тотожність

$$\int_0^\infty P(t) dt = \int_0^\tau P(t) dt + \int_\tau^\infty P(t) dt. \quad (7)$$

Так як

$$\int_0^\infty P(t) dt = R(0); \quad \int_\tau^\infty P(t) dt = P(\tau) R(\tau); \quad (8)$$

то, підставляючи (5), (6) і (8) в (7) отримаємо, що

$$R(0) = m_\tau + P(\tau) \cdot R(\tau) \quad (9)$$

або 
$$R(\tau) = (R(0) - m_\tau) / P(\tau). \quad (10)$$

Формула (10) дозволяє за відомою величиною середнього ресурсу  $R(0)$  і витраченого ресурсу  $m_\tau$  знаходити величину середнього ЗР  $R(\tau)$ .

Знайдемо тепер відповідні формули для гамма-процентного ЗР. Відомо, що величина «гамма-процентного залишкового ресурсу  $R_\gamma(\tau)$ » визначається зі співвідношення

$$P(t + \tau) / P(\tau) = 0,01 \cdot \gamma; \quad 0 < \gamma < 100\%. \quad (11)$$

Якщо рівнянню (11) задовольняє кілька коренів, то в якості показника  $R_\gamma(\tau)$  вибирається найменший з них. З формули (3.11) випливає, що  $R_\gamma(0) = R_\gamma$ , тобто гамма-процентний ЗР є узагальненням гамма-процентного ресурсу. Крім того, так як  $P(\tau) \cdot 0,01 \cdot \gamma < 0,01 \cdot \gamma$ , то з формули (11) слідує:

$$R_\gamma(\tau) \geq R_\gamma - \tau. \quad (12)$$

Наведемо основні розрахункові співвідношення показників ЗР при різних законах розподілу напрацювання до ресурсної відмови.

А. Напрацювання до ресурсної відмови – усечений нормальний розподіл з параметрами:  $\mu$  – математичне очікування і  $\sigma$  – середнє квадратичне відхилення напрацювання до відмови,  $t \in (0; \infty)$ . Тоді:

$$P(\tau) = C \cdot \Phi((\mu - \tau) / \sigma); \quad C = [\Phi(\mu / \sigma)];$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp(-u^2/2) du;$$

$$P_\tau(t) = \Phi\left(\frac{\mu - \tau - t}{\sigma}\right) / \Phi\left(\frac{\mu - \tau}{\sigma}\right); \quad (13)$$

$$R(\tau) = \mu - \tau + \sigma \cdot f_1\left(\frac{\mu - \tau}{\sigma}\right), \quad (14)$$

де  $f_1(y) = \frac{\phi(y)}{\Phi(y)}$ ,  $\phi(y)$  – похідна  $\Phi(y)$ ,  $y = \frac{\mu - \tau}{\sigma}$ .

В окремому випадку отримуємо:

$$R(0) = \mu + \sigma \cdot \varphi(\mu/\sigma) \cdot (\Phi(\mu/\sigma))^{-1} = \mu + \sigma \cdot C \cdot \exp\left(-\mu^2/(2\sigma^2)\right) \cdot (\sqrt{2\pi})^{-1}. \quad (15)$$

Функція  $f_1(y)$  табульована, її значення наведені в літературі. Величину гамма-процентного ресурсу отримаємо з рівняння (11)

$$\Phi\left(\frac{(\mu - R_\gamma(\tau) - \tau)}{\sigma}\right) = 0,01 \cdot \gamma \cdot \Phi\left(\frac{(\mu - \tau)}{\sigma}\right),$$

або 
$$R_\gamma(\tau) = \mu - \tau - u_\alpha \cdot \sigma, \quad (16)$$

де  $\alpha = 0,01 \cdot \gamma \cdot \Phi\left(\frac{(\mu - \tau)}{\sigma}\right)$ .

Б. Напрацювання до ресурсного відмови – розподіл Вейбулла  $P(t) = \exp\left(-\frac{t}{\Theta}^\beta\right)$ ,  $\beta > 1$ ,  $\Theta > 0$ .

Тоді:

$$P_\tau(t) = \exp\left(-\frac{((t + \tau)^\beta - \tau^\beta)}{\Theta^\beta}\right). \quad (17)$$

Знайдемо тепер співвідношення для середнього залишкового ресурсу. маємо:

$$\int_\tau^\infty P(t) dt = \frac{\Theta}{\beta} \int_{(\tau/\Theta)^\beta}^\infty \exp(-u) \cdot u^{(1/\beta)-1} du = \frac{\Theta}{\beta} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \left(\frac{\tau}{\Theta}\right)^\beta\right).$$

Тоді за формулою (4), отримуємо

$$R(\tau) = \frac{\Theta}{\beta} \cdot \exp\left(\left(\frac{\tau}{\Theta}\right)^\beta\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \left(\frac{\tau}{\Theta}\right)^\beta\right). \quad (18)$$

В окремому випадку отримуємо:

$$R(0) = \frac{\Theta}{\beta} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) = \Theta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), \quad (19)$$

а формулу для гамма-процентного ЗР знайдемо з (11):

$$\exp\left(\left(\frac{t + \tau}{\Theta}\right)^\beta\right) = 0,01 \cdot \gamma \cdot \exp\left(-\left(\frac{\tau}{\Theta}\right)^\beta\right) = \alpha,$$

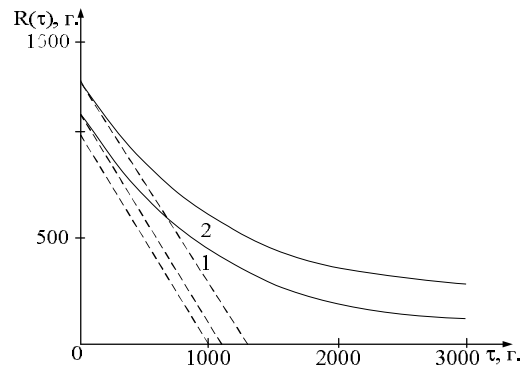
вирішуючи його відносно  $t$ . В результаті отримаємо

$$R_\gamma(\tau) = \Theta \cdot (-\ln \alpha)^{1/\beta} - \tau. \quad (20)$$

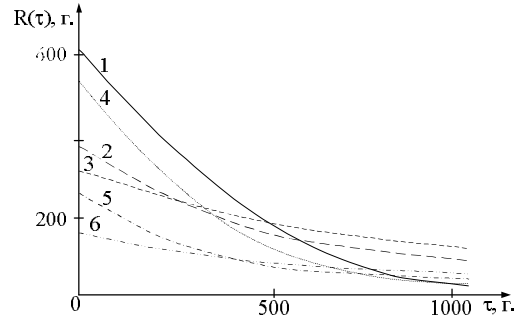
Нижче на рис. 2, 3 наведені графіки залежностей величин  $R(\tau)$  та  $R_\gamma(\tau)$  від величини призначеного ресурсу  $\tau$  для різних функцій розподілу напрацювань до ресурсної відмови і різних параметрів функцій розподілу. Наведені визначення та розрахункові співвідношення характеристик і показників ЗР для відновлюваних виробів являють собою систематизацію відомих в науково-технічній літературі відомостей, їх узагальнення та подальший розвиток. Показано, що відомі в теорії надійності показники довговічності є окремим випадком показників залишкової довговічності.

Отримані розрахункові співвідношення можна використовувати для розрахунків показників залишкового ресурсу КВ РЕС літака, результати яких, в свою чергу, можна використовувати для вирішення завдань продовження ресурсів РЕС літака.

Викладений аналітичний метод розрахунку показників ЗР може бути використаний для вирішення

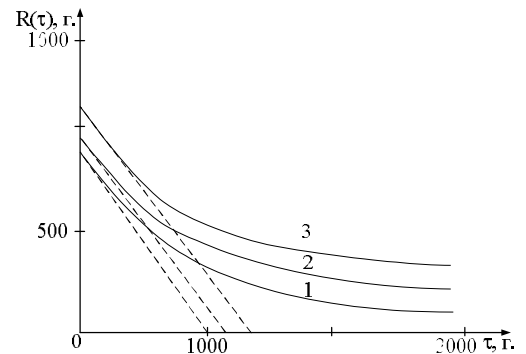


а –  $\sigma = 300$  (кр.1),  $\sigma = 600$  (кр.2),  $\sigma = 900$  (кр.3)

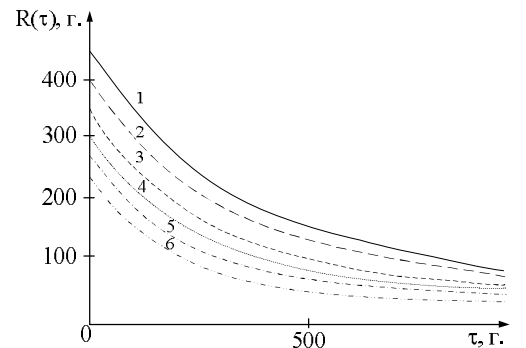


б –  $\gamma = 90\%$ :  $\sigma = 300$  (кр.1),  $\sigma = 600$  (кр.2),  $\sigma = 900$  (кр.3),  
 $\gamma = 95\%$ :  $\sigma = 300$  (кр.4),  $\sigma = 600$  (кр.5),  $\sigma = 900$  (кр.6)

**Рис. 2.** Графіки залежностей  $R(\tau)$  (а) та  $R_\gamma(\tau)$  (б) при усіченому нормальному розподілі напрацювання до ресурсної відмови для різних параметрів.  $\mu = 1000$



а –  $\Theta = 1128,30$  (кр. 1);  $\Theta = 1207,58$  (кр.2);  $\Theta = 1384,29$  (кр.3)



б –  $\gamma = 90\%$  (кр.1-3) та  $\gamma = 95\%$  (кр.4-6);  
 $\Theta = 1128,30$  (кр. 1,4);  $\Theta = 1207,58$  (кр.2,5);  $\Theta = 1384,29$  (кр.3,6)

**Рис. 3.** Графіки залежностей  $R(\tau)$  (а) та  $R_\gamma(\tau)$  (б) при розподілі Вейбулла для різних параметрів:  
а –  $\beta = 2$ ; б –  $\gamma = 90\%$  та  $\gamma = 95\%$

задач знаходження ЗР, для оцінки показників ЗР невідновлюваних виробів за даними експлуатації та, зокрема, виробів електротехніки і радіотехніки, а також при обґрунтуванні призначених термінів служби (ресурсів) ПЕС літака. Для виконання таких розрахунків необхідно мати характеристики щільності розподілу  $f(t)$  напрацювання КВ до відмови або ймовірності безвідмовної роботи  $P(t)$ , уточнені за даними лідерної і підконтрольної експлуатації літака.

### Висновки

1. Обґрунтовано доцільність використання для вирішення завдань продовження ресурсу показників залишкового ресурсу невідновлюваних виробів:

середнього залишкового ресурсу, гамма-процентного залишкового ресурсу, функції розподілу залишкового ресурсу. Показано, що середній залишковий ресурс і гамма-процентний залишковий ресурс є узагальненням відомих показників довговічності: середнього ресурсу і гамма-відсоткового ресурсу. Отримано розрахункові співвідношення для показників залишкового ресурсу для невідновлювальних виробів при різних функціях розподілу напрацювання до ресурсного відмови.

2. Введено поняття залишковий ресурс і залишкова напрацювання для відновлюваних виробів і відповідні показники залишкового ресурсу і залишкової напрацювання. Показано, що для невідновлювальних виробів поняття залишковий ресурс і залишкова напрацювання збігаються.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ю.Я. Бобало, Л.А. Недоступ, М.Д. Кіселичник. Якість, надійність радіоелектронної апаратури: [монографія] / Ю.Я. Бобало, Л.А. Недоступ, М.Д. Кіселичник; за ред. Л.А. Недоступа. – Львів: Видавництво ЛП, 2013. – 196 с.
2. Бобало Ю.Я. Аналіз методів оцінювання безвідмовності систем сумісно працюючих компонентів електронних пристроїв / Ю.Я. Бобало, Л.А. Недоступ, О.В. Лазько // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2007. – № 7 (26). – С. 212–214.
3. Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытание на безотказность, М.: Наука, 1985.
4. Кучук, Г.А. Синтез стратифікованої інформаційної структури інтеграційної компоненти гетерогенної складової Єдиної АСУ Збройними Силами України / Г.А. Кучук, О.П. Давікоза // Наука і техніка Повітряних Сил Збройних Сил України: науково-технічний журнал. – Х.: ХУ ПС, 2013. – № 3(12). – С. 154-158.
5. Гудков М. В. Методика прогнозування надійності радіоелектронного обладнання при експлуатації авіаційної техніки за станом з контролем параметрів / М.В. Гудков // Системи озброєння і військова техніка. – 2010. – № 4(24). – С. 32-35.
6. Коваленко А. А., Кучук Г. А. Методи синтезу інформаційної та технічної структур системи управління об'єктом критичного застосування. *Сучасні інформаційні системи*. 2018. Т. 2, № 1. С. 22–27. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2018.1.04>
7. Чернявський В. М. Застосування непараметричних методів для оцінки рівня надійності авіаційної техніки з низькою інтенсивністю експлуатації / В.М. Чернявський // Збірник наукових праць ХНУПС. – 2012. – № 3(32). – С. 59-63.
8. Надійність техніки. Методи оцінки показників надійності за експериментальними даними : ДСТУ 3004-95. – [Чинний від 1995-01-25]. – К.: Держспоживстандарт України, 1995. – 51 с.
9. Каштанов В.А. Теория надежности сложных систем /В.А. Каштанов, А.И. Медведев. – 2-е изд, перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 608 с.
10. Свиридов А. С., Коваленко А. А., Кучук Г. А. Метод перерозподілу пропускну здатності критичної ділянки мережі на основі удосконалення ON/OFF-моделі трафіку. *Сучасні інформаційні системи*. 2018. Т. 2, № 2. С. 139–144. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2018.2.24>
11. Mathematical models of the failure flow of the aircraft electronic system components / Haievskiy S.V., Hmelevskiy S.I., Boyko A.V., Myschenko T.Yu., Timochko O.O. // *Сучасні інформаційні системи*. 2020. Т. 4, № 2. - С. 34-41.
12. Haievskiy S. Розробка загальних положень з розрахунку показників залишкового ресурсу радіоелектронної системи літака / S. Haievskiy, S. Balakireva, I. Kulakov // Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць. – Полтава: ПНТУ, 2020. – Т. 2 (60). – С. 3-11. – doi:<https://doi.org/10.26906/SUNZ.2020.2.003>.

Received (Надійшла) 22.06.2020

Accepted for publication (Прийнята до друку) 12.08.2020

### Mathematical models for calculation of the residual life indicators of non-restorable parts of aircraft radio electronic system

S. Haievskiy, S. Balakireva, I. Kulakov

**Abstract.** The **subject matter** of the article are the processes of functioning of the radio-electronic system of a modern aircraft, its component parts and functional units as an object for determining and calculating indicators of residual life. The **goal** is the development of the existing mathematical apparatus used to calculate the indicators of the residual life of non-recoverable components of the aircraft radio-electronic system. The **tasks**: to develop mathematical models for calculating the indicators of the residual life of non-recoverable components of the aircraft radio-electronic system. Analyzed **methods** and **models** are: analytical method for calculating residual life indicators, models for indicators of the residual life of a non-recoverable object of a radio-electronic system. The following **results** were obtained: The expediency of using the indicators of the residual life of non-recoverable products for solving the problems of extending the resource is substantiated: the average residual resource, the gamma-percentage residual resource, the distribution function of the residual resource. **Conclusions.** Calculated ratios are obtained for indicators of residual life for non-recoverable products with different distribution functions of operating time to resource failure.

**Keywords:** residual life, residual operating time, aircraft, mathematical model, indicator, electronic system, technical condition.