

В. Ю. Дубницький¹, А. М. Кобылин¹, О. А. Кобылин²

¹Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ Университета банковского дела, Харьков, Украина

²Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ АБСОЛЮТНОЙ И ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ ТИПОВ ИНДЕКСОВ ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ ЦЕН

Цель работы: определение предельной абсолютной и относительной погрешности, возникающей при вычислении основных типов индексов потребительских цен: индекса Ласпейреса, индекса Фишера, индекса Джевонса, индекса Уолша, индекса Лоу, индекса Пааше. **Использованные методы:** линеаризация функции случайных величин, методы теории погрешностей приближенных вычислений, методы интервального анализа. **Результаты работы:** Получены, используя методы теории погрешностей приближенных вычислений, выражения для вычисления значений предельной абсолютной и относительной погрешности, возникающей при вычислении основных типов индексов потребительских цен. Приведены выражения для вычисления значений основных типов индексов потребительских цен методами интервального анализа с представлением чисел в системе центр-радиус. Для условного примера выполнено вычисление интервальных значений анализируемых индексов и определена ширина интервала неопределённости, возникающего при их вычислении. Показано, что при вычислении на одних и тех же данных имеет место следующее упорядочение ИПЦ по возрастанию значений центра интервала неопределённости: индекс Ласпейреса, индекс Фишера, индекс Джевонса, индекс Уолша, индекс Лоу, индекс Пааше. Показано, что при вычислении на одних и тех же данных имеет место следующее упорядочение ИПЦ по возрастанию значений относительной ширины доверительного интервала: индекс Джевонса, индекс Фишера, индекс Пааше, индекс Ласпейреса, индекс Уолша, индекс Лоу. **Тема дальнейших исследований:** разработка и согласование способов вычисления погрешностей, возникающих при вычислении ИПЦ, является важной задачей для дальнейших исследований. Отсутствие её общепринятого решения усложняет получение корректных выводов об изменениях в состоянии изучаемых экономических систем.

Ключевые слова: индекс потребительских цен, индекс цен, индекс Ласпейреса, индекс Фишера, индекс Джевонса, индекс Уолша, индекс Лоу, индекс Пааше, погрешность вычислений, предельная абсолютная и относительная погрешности вычислений, интервальный анализ.

Вступление

Индекс потребительских цен (ИПЦ) или, сокращённо, но не вполне корректно – индекс цен, используют как показатель социальной и экономической ситуации в экономике и обществе. Его определение описано во всех учебниках по экономической статистике, например, в работах [1-3]. Однако в них не перечислены организационные и вычислительные проблемы, возникающие при его применении. В своей повседневной деятельности органы государственной статистики руководствуются нормативными документами, которые регламентируют процедуры сбора исходных данных и их последующей обработки. Основными нормативными документами служат работы [4,5]. Национальные органы государственной статистики создают свои нормативные документы, как правило, согласованные с указанными работами. Например, в Украине действует документ [6]. В соответствии с ним далее будем использовать следующие определения:

- индекс цен – относительный показатель, выраженный в коэффициентах или процентах, характеризующий изменение цен во времени (индекс динамики) или в пространстве (территориальный индекс).

- индивидуальный индекс цен представляет собой отношение цены конкретной сельскохозяйственной продукции в определённый период времени к цене этой же продукции в базисном периоде.

- групповой индекс цен – взвешенное среднее значение всех индивидуальных индексов цен, который характеризует изменение цен отдельной группы,

подкласса из числа всей совокупности продукции.

- сводный индекс цен – взвешенное среднее значение всех групповых индексов цен, который отражает общее изменение цен конкретных видов продукции. Период, для которого вычисляют ИПЦ, называют отчётным и обозначают символом «1», период, по отношению к которому вычисляют ИПЦ, называют базисным и обозначают символом «0». Цену i -го продукта ($i = 1, \dots, n$) в базисном периоде обозначают величиной p_{i0} , количество приобретенного продукта в этом же периоде обозначают величиной q_{i0} . Цену i -го продукта ($i = 1, 2, \dots, n$) в отчётном периоде обозначают величиной p_{i1} , количество приобретенного продукта в этом же периоде обозначают величиной q_{i1} . При выборе типов ИПЦ, рассмотренных в данном сообщении предпочтение было отдано типам индексов, указанных в работе [4, С.382]. Указанный раздел красноречиво назван: «Основопологающие типы экономических индексов». ИПЦ, рассмотренные в предлагаемой работе, приведены в табл. 1.

Актуальность работы. Исходные данные, необходимые для вычисления ИПЦ, получают в результате выборочных наблюдений. В работе [4, С. 271] перечислены возможные источники появления систематических и статистических ошибок, и их влияние на истолкование полученных результатов. В то же время описание конкретных вычислительных процедур, позволяющих оценить абсолютную и относительную погрешность, возникающую при вычислении ИПЦ в работах [4-6] отсутствует. Подобный пробел позволяет считать задачу разработки таких процедур актуальной и имеющей прикладное значение.

Таблиця 1 – Индексы потребительских цен

№	Тип индекса	Расчетная формула	№	Тип индекса	Расчетная формула
1	Индекс Лоу	$P_{LO} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} \bar{q}_i}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \bar{q}_i}, \quad q_i = \frac{1}{2}(q_{i0} + q_{i1})$	4	Индекс Фишера	$P_F = \sqrt{P_L P_F}$
2	Индекс Ласпейреса	$P_L = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}}$	5	Индекс Уолша	$P_W = T_1 / T_0; \quad z_i = q_{i0} q_{i1};$ $T_1 = \sum p_{i1} \sqrt{z_i}; \quad T_0 = \sum p_{i0} \sqrt{z_i}$
3	Индекс Пааше	$P_P = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i1}}$	6	Индекс Дживонса	$P_G = \left(\prod_{i=1}^n \frac{p_{i1}}{p_{i0}} \right)^{1/n}$

Анализ литературы. Различные варианты решения задачи об определении погрешностей при вычислении ИПЦ рассмотрены в работах [7...11]. В работе [7] рассмотрены три взаимосвязанных задачи: оценки погрешности, чувствительности и устойчивости экономических показателей, в том числе и экономических индексов. Для оценки погрешности определения экономических показателей автор работы [7] использует методы теории погрешности вычислений и методы математической статистики. В частности, именно в работе [7] сформулирована рассматриваемая в настоящем сообщении задача и намечен способ её решения. В работе [8] методами имитационного моделирования было изучено влияние случайных погрешностей на изменение индексов, характеризующих динамику экономических показателей. Близкие к указанным работам взгляды изложены в работах [9, 10]. В работе [11] рассмотрена задача определения интервала неопределённости при вычислении значений основных типов сводных индексов, используемых в экономической статистике, в том числе и ИПЦ, приведенных в формах Пааше и Ласпейроса. Задача решена в предположении, что данные, необходимые для вычислений, получены по результатам выборочных наблюдений. Также определены выражения, необходимые для оценки дисперсии результатов вычислений, абсолютной и относительной погрешности процесса получения численных значений индексов. Получены выражения для определения предельной относительной ошибки при вычислении этих индексов. Для определения интервалов значений индексов в работе [12] предложено использовать методы интервального анализа, подробное описание которых дано в работе [13].

В работе [11] для определения погрешности вычисления основных типов экономических индексов, в том числе и ИПЦ, использована концепция неопределенности измерений, основные положения которой изложены в нормативном документе [14] и работе [15]. В соответствии с ними неопределённость делят на две группы. Неопределённость типа *A*, оцениваемая по результатам статистического анализа повторных наблюдений и неопределённость типа *B*, оцениваемая нестатистическими методами.

Для определения неопределённости типа *A* используем описанный в [16] метод линеаризации. Пусть нам известна с точностью до постоянных коэффициентов функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, где $x_i, i = 1, \dots, k$ случайные величины, имеющие, по край-

ней мере, конечные вторые начальные и центральные моменты. Тогда среднее значение такой функции:

$$\bar{u} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k), \tag{1}$$

дисперсию результатов определения значений функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ определим по формуле:

$$D[u] \approx \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\bar{x}}^2 D[x_i] + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{\bar{x}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)_{\bar{x}} \times r_{ij} \sigma(x_i) \sigma(x_j). \tag{2}$$

Если аргументы функции *u* попарно независимы, то

$$D[u] \approx \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\bar{x}}^2 D[x_i] \tag{3}$$

Применение этого метода для решения задачи, сформулированной в заголовке данного сообщения, затруднено следующими обстоятельствами. Документы [4...6] не требуют при своём применении сведений о статистических характеристиках выборки, что делает невозможным применение метода линеаризации. Для определения неопределённости типа *A* используем следующий приём. Пусть Δx_i расширенная неопределённость (ширина доверительного интервала) каждой переменной x_i . Придадим величине Δx_i смысл предельной абсолютной ошибки определения величины x_i . Тогда, в соответствии с работой [17], предельную абсолютную погрешность определяют по формуле:

$$\Delta u \leq \sum_{i=1}^k \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|; \tag{4}$$

предельную относительную погрешность определяют по формуле:

$$\delta_u = \sum_{i=1}^k \left| \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} |\ln u| \cdot |\Delta x_i|. \tag{5}$$

Для ИПЦ Пааше и Ласпейреса эти виды погрешностей определены в работе [11]. Величину абсолютной погрешности Δx_i , в соответствии с документом [4] требуется оценивать в процессе выборочных наблюдений над величинами p_i, q_i . Особо следует выделить работу [18], в которой экономические индексы рассмотрены как математические объекты со своими свойствами и сформулирована система аксиом, которые должны выполняться для этих объектов.

Для определения неопределённости типа *B* используем следующий приём. Так, как каждый из сомножителей, входящих в формулы для определения ИПЦ, определяют по результатам выборочных наблюдений, то примем, что величина Δx_i и есть неопределённость определения переменной x_i , равная половине величины её доверительного интервала. В работе [19] предложено использовать для вычисления погрешностей методы интервального анализа. Для этого рассмотрим выражение вида:

$$Z = \sum_{i=1}^n a_i b_i / \sum_{i=1}^n c_i d_i \quad (6)$$

Рассматривая это выражение как некий обобщённый индекс, представим его в интервальном виде, используя систему центр-радиус:

$$\tilde{Z} = \langle z; r_z \rangle = \frac{\tilde{U}}{\tilde{W}} = \frac{\langle u; r_u \rangle}{\langle w; r_w \rangle}. \quad (6)$$

Числитель выражения (6) представим в виде:

$$\langle u; r_u \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a_i; r_{ai} \rangle \cdot \langle b_i; r_{bi} \rangle; \quad (7)$$

знаменатель выражения (6) представим в виде:

$$\langle w; r_w \rangle = \sum_{i=1}^n \langle c_i; r_{ci} \rangle \cdot \langle d_i; r_{di} \rangle. \quad (8)$$

Представим слагаемое в условии (8) в таком виде:

$$\begin{aligned} & \langle a_i; r_{ai} \rangle \cdot \langle b_i; r_{bi} \rangle = \\ & = \left\langle \sum_{i=1}^n (a_i b_i + r_{ai} r_{bi}); \sum_{i=1}^n (a_i r_{bi} + b_i r_{ai}) \right\rangle. \quad (9) \end{aligned}$$

Используя доказанное в работе [13] свойство ассоциативности для интервальных чисел, определённых в системе центр-радиус, условие (9) представим в виде:

$$\langle u; r_u \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n (a_i b_i + r_{ai} r_{bi}); \sum_{i=1}^n (a_i r_{bi} + b_i r_{ai}) \right\rangle. \quad (10)$$

Знаменатель условия (7) используя равенство (10) представим в виде:

$$\langle w; r_w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n (c_i d_i + r_{ci} r_{di}); \sum_{i=1}^n (c_i r_{di} + d_i r_{ci}) \right\rangle. \quad (11)$$

Используя выражение (7) получим, что:

$$\frac{\langle u; r_u \rangle}{\langle w; r_w \rangle} = \left\langle \frac{uw + r_u r_w}{w^2 - r_w^2}, \frac{ar_b + br_a}{w^2 - r_w^2} \right\rangle. \quad (12)$$

Из условий (7) и (8) следует, что:

$$u = \sum_{i=1}^n (a_i b_i + r_{ai} r_{bi}); \quad (13)$$

$$r_u = \sum_{i=1}^n (a_i r_{bi} + b_i r_{ai}); \quad (14)$$

$$w = \sum_{i=1}^n (c_i d_i + r_{ci} r_{di}); \quad (15)$$

$$r_w = \sum_{i=1}^n (c_i r_{di} + d_i r_{ci}). \quad (16)$$

Для ИПЦ Паше и Ласпейреса они определены в работе [19]. Для получения их численных значений использовали разработанные авторами данного сообщения программные продукты, описанные в работах [20, 21]. В работе [11] приведен пример вычисления сводного индекса объёма товарооборота, показавший, что пренебрежение величиной погрешности вычислений основных типов экономических индексов приводит к ошибочным решениям при оценке изменений в изучаемых экономических системах.

Постановка задачи: определение интервала неопределённости (предельной абсолютной и относительной погрешности) определяемого методами теории погрешностей для ИПЦ Лоу, Фишера, Уолша, Джевонса и определение значений этих же ИПЦ с использованием методов интервальных вычислений, обусловленного применением выборочных методов при сборе исходных данных, необходимых для проведения соответствующих расчётов.

Полученные результаты

Для удобства при проведении дальнейших вычислений сведём необходимые суммы в табл. 2.

Таблица 2 – Условные обозначения сумм

A	$\sum_{i=1}^n p_{i1} \bar{q}_i$	E	$\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}$
B	$\sum_{i=1}^n p_{i0} \bar{q}_i$	G	$\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i1}$
C	$\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i0}$	H	$\sum_{i=1}^n p_{i1} \sqrt{q_{i1} q_{i0}}$
D	$\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}$	K	$\sum_{i=1}^n p_{i0} \sqrt{q_{i1} q_{i0}}$

Определение предельной абсолютной и относительной погрешности вычисления индекса Лоу. В соответствии с работой [17] и условиями (4...5) необходимо знание частных производных по переменным, входящим в состав этого индекса. Соответствующие выражения приведены в табл. 3.

Таблица 3 – Частные производные по переменным, входящим в состав индекса Лоу

Частная производная	Вычисление частной производной
$\frac{\partial}{\partial p_{i1}} P_{LO}$	$\ell_1 = \frac{\bar{q}_i}{B}$
$\frac{\partial}{\partial p_{i0}} P_{LO}$	$\ell_2 = -\frac{\bar{q}_i A}{B^2}$
$\frac{\partial}{\partial q_i} P_{LO}$	$\ell_3 = \frac{p_{i1}}{B} - \frac{p_{i0} A}{B^2}$

Следовательно, предельная абсолютная погрешность вычисления индекса Лоу не превзойдёт величины

$$\Delta P_{LO} \leq \sum_{i=1}^n (|\ell_1| \cdot |\Delta p_{i1}| + |\ell_2| \cdot |\Delta p_{io}| + |\ell_3| \cdot \Delta q_i); \quad (17)$$

предельная относительная погрешность вычисления индекса Лоу не превзойдёт величины

$$\delta P_{LO} \leq \sum_{i=1}^n \left(\left| \frac{\ell_1}{P_{LO}} \right| |\Delta p_{i1}| + \left| \frac{\ell_2}{P_{LO}} \right| |\Delta p_{io}| + \left| \frac{\ell_3}{P_{LO}} \right| |\Delta q_i| \right). \quad (18)$$

Определение предельной абсолютной и относительной погрешности вычисления индекса Ласпейреса. В соответствии с работой [17] и условиями (4, 5) необходимо знание частных производных по переменным, входящим в состав этого индекса. Соответствующие выражения приведены в табл. 4.

Таблица 4 – Частные производные по переменным, входящим в состав индекса Ласпейреса

Частная производная	Вычисление частной производной
$\frac{\partial}{\partial p_{i0}} P_L$	$L_1 = -\frac{q_{i0}C}{D^2}$
$\frac{\partial}{\partial p_{i1}} P_L$	$L_2 = \frac{q_{i0}}{D}$
$\frac{\partial}{\partial q_{i0}} P_L$	$L_3 = \frac{p_{i1}}{D} - \frac{p_{i0}C}{D^2}$

Следовательно, предельная абсолютная погрешность вычисления индекса Ласпейреса не превзойдёт величины

$$\Delta P_L \leq \sum_{i=1}^n (|L_1| |\Delta p_{i0}| + |L_2| |\Delta p_{i1}| + |L_3| |\Delta q_{i0}|). \quad (19)$$

предельная относительная погрешность вычисления индекса Ласпейреса не превзойдёт величины

$$\delta P_L \leq \sum_{i=1}^n \left(\left| \frac{L_1}{P_L} \right| |\Delta p_{i0}| + \left| \frac{L_2}{P_L} \right| |\Delta p_{i1}| + \left| \frac{L_3}{P_L} \right| |\Delta q_{i0}| \right). \quad (20)$$

Определение предельной абсолютной и относительной погрешности вычисления индекса Пааше. Соответствующие выражения для частных производных приведены в табл. 5.

Таблица 5 – Частные производные по переменным, входящим в состав индекса Пааше

Частная производная	Вычисление частной производной
$\frac{\partial}{\partial p_{i0}} P_P$	$\pi_1 = -\frac{q_{i1}A}{G^2}$
$\frac{\partial}{\partial p_{i1}} P_P$	$\pi_2 = \frac{q_{i1}}{G}$
$\frac{\partial}{\partial q_{i0}} P_P$	$\pi_3 = \frac{p_{i1}}{G} - \frac{p_{i0}E}{G^2}$

Следовательно, предельная абсолютная погрешность вычисления индекса Пааше не превзойдёт

$$\Delta P_P \leq \sum_{i=1}^n (|\pi_1| |\Delta p_{i0}| + |\pi_2| |\Delta p_{i1}| + |\pi_3| |\Delta q_{i0}|); \quad (21)$$

предельная относительная погрешность вычисления индекса Пааше не превзойдёт величины:

$$\delta P_P \leq \sum_{i=1}^n \left(\left| \frac{\pi_1}{P_P} \right| |\Delta p_{i0}| + \left| \frac{\pi_2}{P_P} \right| |\Delta p_{i1}| + \left| \frac{\pi_3}{P_P} \right| |\Delta q_{i0}| \right). \quad (22)$$

Определение предельной абсолютной и относительной погрешности вычисления индекса Фишера. Соответствующие выражения для частных производных приведены в табл. 6.

Таблица 6 – Вычисление частной производной

Частная производная	Вычисление частной производной
$\frac{\partial}{\partial p_{i1}} P_F$	$f_1 = (2P_F)^{-1} \left(\frac{q_{i0}E + q_{i1}D}{GD} \right)$
$\frac{\partial}{\partial p_{i0}} P_F$	$f_2 = -(2P_F)^{-1} \left[\frac{EC}{GD} \left(\frac{q_{i1}}{G} + \frac{q_{i0}}{D} \right) \right]$
$\frac{\partial}{\partial q_{i0}} P_F$	$f_3 = (2P_F)^{-1} \left(\frac{q_{i1}E}{GD} - \frac{p_{i0}EC}{GD^2} \right)$
$\frac{\partial}{\partial q_{i1}} P_F$	$f_4 = (2P_F)^{-1} \left(\frac{p_{i1}C}{GD} - \frac{p_{i0}EC}{G^2D} \right)$

Следовательно, предельная абсолютная погрешность вычисления индекса Фишера не превзойдёт величины:

$$\Delta P_F \leq \sum_{i=1}^n \left(|f_1| |\Delta p_{i1}| + |f_2| |\Delta p_{i0}| + |f_3| |\Delta q_{i0}| + |f_4| |\Delta q_{i1}| \right); \quad (23)$$

предельная относительная погрешность вычисления индекса Фишера не превзойдёт величины:

$$\delta P_F \leq \sum_{i=1}^n \left(|f_1/2P_F| \cdot |\Delta p_{i1}| + |f_2/2P_F| \cdot |\Delta p_{i0}| + |f_3/2P_F| \cdot |\Delta q_{i0}| + |f_4/2P_F| \cdot |\Delta q_{i1}| \right). \quad (24)$$

Определение предельной абсолютной и относительной погрешности вычисления индекса Уолша. Соответствующие выражения для частных производных приведены в табл. 7.

Таблица 7 – Частные производные по переменным, входящим в состав индекса Уолша

Частная производная	Вычисление частной производной
$\frac{\partial}{\partial p_{i1}} P_W$	$\omega_1 = \frac{\sqrt{q_{i1}q_{i0}}}{H}$
$\frac{\partial}{\partial p_{i0}} P_W$	$\omega_2 = -\frac{H\sqrt{q_{i1}q_{i0}}}{K^2}$
$\frac{\partial}{\partial q_{i0}} P_W$	$\omega_3 = \frac{q_{i1}p_{i1}}{2\sqrt{q_{i1}q_{i0}} \cdot K} - \frac{q_{i1}p_{i1}K}{2\sqrt{q_{i1}q_{i0}} \cdot K^2}$
$\frac{\partial}{\partial q_{i1}} P_W$	$\omega_4 = \frac{q_{i0}p_{i1}}{2\sqrt{q_{i1}q_{i0}} \cdot K} - \frac{q_{i0}p_{i0}H}{2\sqrt{q_{i1}q_{i0}} \cdot K^2}$

Следовательно, предельная абсолютная погрешность вычисления индекса Уолша не превзойдет

$$\Delta P_W \leq \sum_{i=1}^n \left(\left| \omega_2 \cdot |\Delta p_{i0}| + \left| \omega_1 \cdot |\Delta p_{i1}| + \left| \omega_3 \cdot |\Delta q_{i0}| + \left| \omega_4 \cdot |q_{i1}| \right| \right| \right); \quad (25)$$

предельная относительная погрешность вычисления индекса Уолша не превзойдет величины:

$$\delta P_W \leq \sum_{i=1}^n \left(\left| \frac{\omega_1}{P_W} \cdot |\Delta p_{i0}| + \left| \frac{\omega_3}{P_W} \cdot |\Delta p_{i1}| + \left| \frac{\omega_2}{P_W} \cdot |\Delta q_{i0}| + \left| \frac{\omega_4}{P_W} \cdot |q_{i1}| \right| \right| \right). \quad (26)$$

Определение предельной абсолютной и относительной погрешности вычисления индекса Джевонса. Частная производная по переменной p_{i1} для индекса Джевонса примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial p_{i1}} P_G = \frac{\prod_{l \neq i} p_{l1}}{n \cdot \prod_{i=1}^n p_{i0} \left(\prod_{i=1}^n p_{i1} / p_{i0} \right)^{(n-1)/n}} = \mathfrak{Z}_1; \quad I = \{1, 2, \dots, n\}; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (27)$$

а по переменной p_{i0} примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial p_{i0}} P_G = \frac{\prod_{i=1}^n p_{i1}}{4 \cdot p_{i0} \prod_{i=1}^n p_{i0} \left(\prod_{i=1}^n p_{i1} / p_{i0} \right)^{(n-1)/n}} = \mathfrak{Z}_0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

Следовательно, предельная абсолютная погрешность вычисления индекса Джевонса не превзойдет величины:

$$\Delta P_G \leq \sum_{i=1}^n \left(\left| \mathfrak{Z}_0 \cdot |\Delta p_{i0}| + \left| \mathfrak{Z}_1 \cdot |\Delta p_{i1}| \right| \right); \quad (29)$$

предельная относительная погрешность вычисления индекса Джевонса не превзойдет величины:

$$\delta P_G \leq \sum_{i=1}^n \left(\left| \frac{\mathfrak{Z}_0}{P_g} \cdot |\Delta p_{i0}| + \left| \frac{\mathfrak{Z}_1}{P_g} \cdot |\Delta p_{i1}| \right| \right). \quad (30)$$

Полученные результаты позволяют решить поставленную задачу, но они достаточно сложны для

применения в практике статистических органов, кроме того, они требуют проведение выборочных исследований для определения законов распределения первичных данных. Выполнение таких исследований усложняет решение поставленной задачи. Кроме того, методы, используемые в таких исследованиях, должны быть согласованы с органами международной статистики. Решение этой организационной задачи, как показывает опыт, может затянуться на длительное время. Поэтому в данной работе использованы методы интервальной арифметики. Определение интервальных значений ИПЦ выполнено в соответствии с условиями (6)...(16). Эти методы позволяют получить требуемые результаты без необходимости проведения соответствующих согласований и внесения изменений в процедуры сбора данных, принятые в национальных и международных статистических организациях.

Рассмотрим условный численный пример, иллюстрирующий полученные результаты. Исходные данные для него заимствованы из работы [11] и приведены в табл. 8.

Таблица 8 – Исходные данные для расчета индексов потребительских цен

Вид продукции	Базисный период		Отчетный период	
	Цена единицы, грн, p_0	Продано единиц, q_0	Цена единицы, грн, p_1	Продано единиц, q_1
Пр.1	12	18	12	15
Пр.2	11	22	10	27
Пр.3	9	20	7	24

Результаты вычислений приведены в табл. 9. При проведении вычислений принято, что переменные, входящие в каждый из вычисляемых индексов, имеют радиус интервала неопределенности, равный полутора процентам от измеряемой величины. Приведенные в табл.9 результаты получены на одних и тех же исходных данных, указанных в табл.8. Это даёт возможность упорядочить по возрастанию ИПЦ по абсолютной величине и относительной ширине интервала неопределенности.

Результаты такого упорядочения приведены в табл.10.

Таблица 9 – Величина интервала неопределенности значений основных типов индексов потребительских цен

Тип индекса потребительских цен	Нижняя граница интервала ИПЦ	Центральное значение ИПЦ	Нижняя граница интервала ИПЦ	Ширина интервала	Относительная ширина интервала неопределенности, %
	$I - r_I$	I	$I + r_I$		
Индекс Лоу	0,8997958	0,942076	1,355239	0,455443	48,34
Индекс Ласпейреса	0,8638041	0,917223	0,973596	0,109792	11,97
Индекс Пааше	0,9100881	0,965714	1,024978	0,11489	11,90
Индекс Фишера	0,8832273	0,929641	0,956453	0,073225	7,88
Индекс Уолша	0,8773545	0,941982	1,002842	0,125488	13,32
Индекс Джевонса	0,8879038	0,929641	0,957648	0,069744	7,50

Таблиця 10 – Упорядочення по возрастанию индексов потребительских цен по абсолютной величине и относительной ширине интервала неопределённости

Упорядочення ИПЦ по абсолютной величине центра интервала неопределённости	индекс Ласпейреса, индекс Фишера, индекс Джевонса, индекс Уолша, индекс Лоу, индекс Пааше.
Упорядочення ИПЦ по относительной ширине интервала неопределённости	индекс Джевонса, индекс Фишера, индекс Пааше, индекс Ласпейреса, индекс Уолша, индекс Лоу.

Обсуждение отличий этих индексов между собой по их экономическому содержанию выходит за пределы компетенции авторов данного сообщения. Ещё раз отметим, что эти ИПЦ приняты к употреблению органами международной статистики, что подтверждено работами [5, 6]. Из табл. 9 следует, что имеет место малое различие между центрами интервалов неопределённости, возникающих при их вычислении и значительное при сравнении их интервальных значений.

Следовательно, разработка и согласование способов вычисления погрешностей, возникающих при вычислении ИПЦ, является важной задачей для дальнейших исследований. Отсутствие её общепринятого решения усложняет получение корректных выводов об изменениях в состоянии изучаемых экономических систем.

Выводы

1. Поставлена задача определения предельной абсолютной и относительной погрешности, возникающей при вычислении основных типов индексов потребительских цен: индекса Ласпейреса, индекса Фишера, индекса Джевонса, индекса Уолша, индекса Лоу, индекса Пааше.

2. Для её решения использованы методы линеаризации функции случайных величин, методы теории погрешностей приближенных вычислений, методы интервального анализа.

3. Получены, используя методы теории погрешностей приближенных вычислений выражения

для вычисления значений предельной абсолютной и относительной погрешности, возникающей при вычислении основных типов индексов потребительских цен.

4. Приведены выражения для вычисления значений основных типов индексов потребительских цен методами интервального анализа с представлением чисел в системе центр-радиус

5. Для условного примера выполнено вычисление интервальных значений анализируемых индексов и определена ширина интервала неопределённости, возникающего при их вычислении.

6. Показано, что при вычислении на одних и тех же данных имеет место следующее упорядочение ИПЦ по возрастанию значений центра интервала неопределённости: индекс Ласпейреса, индекс Фишера, индекс Джевонса, индекс Уолша, индекс Лоу, индекс Пааше.

7. Показано, что при вычислении на одних и тех же данных имеет место следующее упорядочение ИПЦ по возрастанию значений относительной ширины доверительного интервала: индекс Джевонса, индекс Фишера, индекс Пааше, индекс Ласпейреса, индекс Уолша, индекс Лоу.

8. Показано, разработка и согласование способов вычисления погрешностей, возникающих при вычислении ИПЦ, является важной задачей для дальнейших исследований. Отсутствие её общепринятого решения усложняет получение корректных выводов об изменениях в состоянии изучаемых экономических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ткач Є.І. Загальна теорія статистики / Є.І.Ткач, В.П. Сторожук. – Київ: Центр учбової літератури, 2009. – 442 с.
2. Ковалевский Г. В. Статистика: учебник / Г. В. Ковалевский; Харьк. нац. акад. гор. хоз-ва. – Х.: ХНАГХ, 2012. – 445 с.
3. Практикум по теории статистики: Учеб. пособие/ Под ред. Р.А. Шмойловой.-М.: Финансы и статистика, 2003.-416с.
4. Руководство по индексу потребительских цен: теория и практика / МОТ; МВФ; ОЭСР; Евростат; ЕЭК ООН; Всемирный банк. – Вашингтон, Международный Валютный Фонд, 2007. – 679 с.
5. Consumer price index manual : theory and practice / International Labour Organization; International Monetary Fund; Organisation for Economic Co-operation and Development; Statistical Office of the European Communities; United Nations; The International Bank for Reconstruction and Development; The World Bank. –Geneva : ILO, 2004. – 864 p. – Title from the screen : <http://www.ilo.org/public/english/bureau/stat/guides/cpi/index.htm>- 6.11.2018 г. – Загл.с экрана
6. Методологічні положення щодо організації статистичного спостереження за змінами цін (тарифів) на споживчі товари (послуги) і розрахунків індексів споживчих цін (Наказ Державної служби статистики України №158 від 29.08.2016). – [Чинний від 29-08-2016]. – К.: Державна служба статистики, 2016. – 51 с. Режим доступа: http://www.ukrstat.gov.ua/metod_polog/metod_doc/2016/158/158_2016.htm/ - 6.11.2018 г. – Загл.с экрана.
7. Эдельгауз Г.Е. Достоверность статистических показателей / Г.Е. Эдельгауз. М.: «Статистика», 1977. – 278 с.
8. Абрамова Ю.С. Исследование проблемы точности планирования финансовых показателей предприятия с помощью имитационно-статистического моделирования: дис. канд. экон. наук: 08. 00. 05 /Абрамова Юлия Сергеевна-Москва, 2005. – 229 с.
9. Сильченко Т.Ю. Точность экономических расчётов при обосновании управленческих решений в производственных системах промышленных предприятий. / Т. Ю. Сильченко // TERRA ECONOMICUS-2009. – Т.7. – №3. – С. 86-90.
10. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First edition. – ISO, Switzerland, 1993.
11. Дубницький В.Ю. Определение интервала неопределённости при применении индексного метода экономической статистики / В. Ю. Дубницький. // Системи обробки інформації. – 2013. – № 8(115). – С.171-175.

12. Дубницький В.Ю. Обчислення значень елементарних функцій з інтервальним заданим аргументом, визначеним в системі центр-радіус. / У. Ю. Дубницький, А. М. Кобилін, О. А. Кобилін. // Системі обробки інформації- 2016. - № 7(144). – С. 107-112.
13. Жуковська О.А. Основи інтегрального аналізу / О.А. Жуковська. – Київ: Освіта України 2009. – 136 с.
14. ДСТУ-Н РМГ 43:2006 Метрологія. Застосування «Руководства по выражению неопределенности измерений» (РМГ 43:2001).
15. Поджаренко В.О. Опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності. Навчальний посібник / В.О. Поджаренко, О.М. Васілевський, В.Ю.Кучерук. –Вінниця: ВНТУ, 2008. –158 с.
16. Венцель Е.С. Теория вероятностей. /Е.С.Венцель.-М.: Изд. «Наука», 1969. – 576 с.
17. Демидович Б.П., Марон И.А.Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А.Марон: М.: Наука, 1966. – 664 с.
18. Ершов Э.Б. Ситуационная теория индексов и количеств / Э.Б. Ершов. – Москва: РИОР, 2011. – 420 с.
19. Дубницький В.Ю. Влияние особенностей подготовки данных на ширину интервала неопределенности типа В при вычислении основных видов экономических индексов / В.Ю. Дубницький, А.М. Кобылин, О.А. Кобылин // Системі управління, навігації та зв'язку. – 2017. - № 1(41). – С.86-91.
20. Дубницький В. Ю. Вычисление значений элементарных функций с интервально заданным аргументом в системе центр-радиус / В. Ю. Дубницький, А. М. Кобылин, О. А. Кобылин // Системі обробки інформації – Х.: ХУПС, 2016. – Вип. 7 (144). – С. 107-112.
21. Дубницький В.Ю., Кобилін А.М. Свідчення про реєстрацію авторського права на твір «Комп'ютерна програма «Спеціалізований програмний продукт «Фінансово-аналітичний калькулятор» [Текст]/Державна служба інтелектуальної власності України, №41741 від 11.01.2012 р.

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. М. В. Новожилова,
Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова, Харків
Received (Надійшла) 30.09.2018
Accepted for publication (Прийнята до друку) 21.11.2018

Визначення граничної абсолютної і відносної похибки обчислення основних типів індексів споживчих цін

В. Ю. Дубницький, А. М. Кобилін, О. А. Кобилін

Мета роботи: визначення граничної абсолютної і відносної похибки, що виникає при обчисленні основних типів індексів споживчих цін: індексу Ласпейреса, індексу Фішера, індексу Джевонса, індексу Уолша, індексу Лоу, індексу Пааше. **Використані методи:** лінеаризація функції випадкових величин, методи теорії похибок наближених обчислень, методи інтервального аналізу. **Результати роботи:** Отримано, використовуючи методи теорії похибок наближених обчислень, вирази для визначення значень граничної абсолютної і відносної похибки, що виникає при обчисленні основних типів індексів споживчих цін. Наведено вирази для обчислення значень основних типів індексів споживчих цін методами інтервального аналізу з поданням чисел в системі центр-радіус. Для умовного прикладу виконано обчислення інтервальних значень індексів споживчих цін і встановлено розміри інтервалу невизначеності, що виникає при їх обчисленні. Показано, що при обчисленні на однакових даних має місце наступне впорядкування індексів споживчих цін за зростанням значень центру інтервалу невизначеності: індекс Ласпейреса, індекс Фішера, індекс Джевонса, індекс Уолша, індекс Лоу, індекс Пааше. Показано, що при обчисленні на одних і тих же даних має місце наступне впорядкування індексів споживчих цін за зростанням значень відносної ширини довірчого інтервалу: індекс Джевонса, індекс Фішера, індекс Пааше, індекс Ласпейреса, індекс Уолша, індекс Лоу. **Тема подальших досліджень:** Розробка і узгодження способів обчислення погрешностей, що виникають при обчисленні індексів споживчих цін, є важливим завданням для подальших досліджень. Відсутність її загальноприйнятого рішення ускладнює отримання коректних висновків про зміни в стані економічних систем, що вивчаються.

Ключові слова: індекс споживчих цін, індекс цін : індекс Ласпейреса, індекс Фішера, індекс Джевонса, індекс Уолша, індекс Лоу, індекс Пааше, похибки обчислень, гранична абсолютна і відносна похибка обчислень, інтервальный аналіз.

Determination of limiting absolute and relative calculation error of main price index types

V. Dubnitskiy, A. Kobylin, O. Kobylin

Object of work: determination of limiting absolute and relative calculation error of main price index types, namely, Laspeyres index, Fisher index, Jevons index, Walsh index, Lowe index, Paasches index. **Applied methods:** function of random variable linearization, methods of approximate calculus theory of errors, interval analysis methods. **Results of work:** Using methods of approximate calculus theory of errors, expressions have been obtained for calculation of limiting absolute and relative error emerging under calculation of main price index types. Expressions were specified for calculation of main price index types by interval analysis methods with numbers presented in center-radius system. For a conditional example interval price index values were calculated and dimensions established for interval of uncertainty emerging under such calculation. It was shown that under calculation from identical initial data price indexes are arranged by growing values of interval of uncertainty center in the following order: Laspeyres index, Fisher index, Jevons index, Walsh index, Lowe index, Paasches index. It was shown that under calculation from identical initial data price indexes are arranged by growing values of confidence interval relative width in the following order: Jevons index, Fisher index, Paasches index, Laspeyres index, Walsh index, Lowe index. **Object of subsequent research:** Development and matching of calculation methods for errors emerging under price index calculation. Lack of such generally accepted solution complicates obtaining correct conclusions on changes in economic systems under study.

Keywords: Price index, Laspeyres index, Fisher index, Jevons index, Walsh index, Lowe index, Paasches index, calculation error, limiting absolute and relative calculation error, interval analysis.