

С. В. Герасимов<sup>1</sup>, О. В. Коломійцев<sup>1</sup>, В. В. Пустоваров<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна

<sup>2</sup> Харківське представництво генерального замовника – ДКА України, Харків, Україна

## ОСОБЛИВОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ ІНЕРЦІАЛЬНИХ ПРИЛАДІВ ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ

В статті показано, що в основу функціонування існуючих приладів інерціальних навігаційних систем літальних апаратів покладено властивість швидкообертових гіроскопів зберігати незмінним напрямком осі обертання в просторі (гіроскопічний ефект). При цьому у загальному випадку похибки гіроскопічних пристроїв (приладів) залежать як від їх конструкції, так і від умов їх роботи. Обґрунтовано актуальну наукову задачу – проведення аналізу особливостей визначення точності вимірювань інерціальних навігаційних систем при розрахунку координат літального апарату. Наведено, що відомий метод часткової компенсації похибок вимірювань аналітичним шляхом на основі обчислення їхніх значень, є недосконалим. Пропонується для обчислення й подальшої компенсації похибок навігаційних вимірювань розробити математичну модель похибок інерціальних навігаційних систем. Така модель аналітично описує зв'язок між вхідними похибками інерціальних навігаційних систем, обумовленими недоліками гіроскопів й акселерометрів, та її вихідними похибками у визначенні координат літального апарату. Запропоновані три складові математичної моделі – блоки розрахунку координат літального апарату. Обґрунтовано, що діапазон вихідних похибок інерціальних навігаційних систем є невеликим, що дозволяє застосувати для дослідження динаміки похибок відомі методи лінеаризації функцій. Розглянуто динаміку утворення похибок у блоку обчислення кутових швидкостей і моментів. Ефективність компенсації зростаючих з часом функціонування похибок інерціальних навігаційних систем залежить від того, наскільки точно апріорно відомі чисельні значення дрейфів гіроскопів і похибок акселерометрів. Подальші дослідження пропонуються направити для перевірки адекватності запропонованої математичної моделі похибок інерціальних навігаційних систем реальним процесам за допомогою результатів імітаційного моделювання з використанням нелінійної моделі формування похибок.

**Ключові слова:** інерціальна навігаційна система, літальний апарат, вимірювання, точність, координати.

### Вступ

**Постановка проблеми.** Відомо, що в основу функціонування існуючих приладів інерціальних навігаційних систем (ІНС) літальних апаратів (ЛА) покладено властивість швидкообертових гіроскопів зберігати незмінним напрямком осі обертання в просторі (гіроскопічний ефект).

У загальному випадку похибки гіроскопічних пристроїв (приладів) залежать як від їх конструкції, так і від умов їх роботи.

Таким чином, проведення аналізу особливостей визначення точності вимірювань ІНС (приладів) визначення координат ЛА є актуальною науковою задачею.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій** показав, що ідеальний гіроскоп, до якого не прикладено зовнішніх моментів, зберігає положення свого вектора моменту кількості руху нерухомим у інерційному просторі [1–7]. До реальних гіроскопів завжди прикладаються деякі неконтрольовані збуджуючі моменти  $M_b$ , які змушують вектор моменту руху рухатися у інерційному просторі.

У рамках прецесійної теорії вісь обертання ротора гіроскопу збігається з вектором моменту руху, тому обертання власної осі гіроскопа, при наявності збуджуючих моментів, буде відбуватися з деякою кутовою швидкістю, яка є швидкістю дрейфу гіроскопа.

Повний дрейф гіроскопів складеться з постійної та флуктуаційної складових.

Постійну складову, що є домінуючою в зростанні загальних похибок гіроскопа, називають також систематичним дрейфом. Він викликається наявністю моментів тертя на осях підвісу, гнучкими провідниками, зворотними реакціями чутливих елементів та іншими причинами.

Флуктуаційна складова похибки викликається дебалансом гіроскопів, анізоеластичними вібраційними моментами, нерівножорсткістю конструкції гіроблока й іншими причинами, що залежать від перевантажень, які виникають на маршруті руху, та називається випадковим дрейфом гіроскопа.

Відомий метод часткової компенсації похибок вимірювань аналітичним шляхом на основі обчислення їхніх значень, для чого необхідно знати джерела й причини виникнення останніх [8, 9]. Тому для обчислення й подальшої компенсації похибок навігаційних вимірювань, необхідно розробити математичну модель похибок ІНС, яка аналітично описує зв'язок між вхідними похибками ІНС, обумовленими недоліками гіроскопів й акселерометрів, та її вихідними похибками у визначенні координат ЛА. При цьому ефективність компенсації зростаючих з часом функціонування похибок ІНС прямо залежить від адекватності математичної моделі похибок ІНС реальним процесам навігаційних вимірювань.

**Метою статті** є проведення аналізу особливостей визначення точності вимірювань інерціальних приладів визначення координат літальних апаратів за допомогою розробленої математичної моделі похибок інерціальних навігаційних систем.

**Виклад основного матеріалу**

За основу математичної моделі незбуреного функціонування ІНС ЛА приймемо математичну модель ІНС на базі гіростабільної платформи (ГСП) з геодезичною орієнтацією опорного тригранника  $\xi\eta\zeta$  (рис. 1).

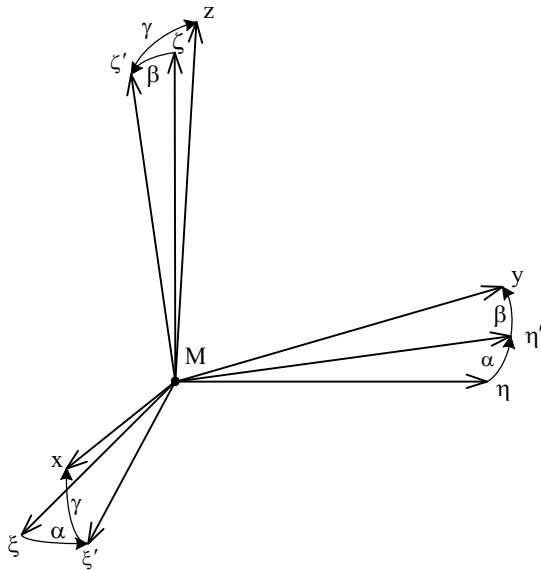


Рис. 1. Взаємне розташування координатних тригранників

Якщо похибки в положенні платформи відсутні, то система координат (СК)  $хуz$ , жорстко зв'язана з платформою, буде тотожно збігатися з опорною СК  $\xi\eta\zeta$ . Шляхом інтегрування показань  $a_\xi, a_\eta, a_\zeta$  акселерометрів, що встановлені на ГСП, можуть бути обчислені проекції  $W_\xi, W_\eta, W_\zeta$  шляхової швидкості руху ЛА на відповідні осі ГСП. Далі, на підставі відомих швидкостей можуть бути обчислені поточні координати ЛА. За відовими координатами і швидкостями руху можуть бути знайдені потрібні (номінальні) кутові швидкості  $\omega_{ax}, \omega_{ay}, \omega_{az}$  обертання платформи в інерційному просторі.

Якщо виробляти моменти  $M_1, M_2, M_3$ , пропорційні абсолютним кутовим швидкостям обертання ГСП, і подавати їх на гіроскопи платформи, можна змусити її рухатися в просторі з належними кутовими швидкостями [10].

**Блок № 1.** Алгоритм обчислення поточних шляхових швидкостей:

$$\begin{aligned} \dot{W}_\xi &= a_\xi - (\omega_\eta + 2\Omega \cos B)W_\zeta + (\omega_\zeta + 2\Omega \sin B)W_\eta, \\ W_\xi(t_0) &= W_{\xi 0}, \quad W_\eta(t_0) = W_{\eta 0}, \quad W_\zeta(t_0) = W_{\zeta 0} \\ \dot{W}_\eta &= a_\eta + \omega_\xi W_\zeta - (\omega_\zeta + 2\Omega \sin B)W_\xi, \\ \dot{W}_\zeta &= a_\zeta - \omega_\xi W_\eta + (\omega_\eta + 2\Omega \cos B)W_\xi - \\ &- \frac{g_{e0} a^2}{(a+h)^2} (1 + 0,005317 \sin^2 B + 0,000007 \sin^2 B). \end{aligned} \quad (1)$$

**Блок № 2.** Алгоритм обчислення поточних геодезичних координат:

$$B(t_0) = B_0, \quad L(t_0) = L_0, \quad h(t_0) = h_0,$$

$$\dot{B} = Q^{-1}W_\eta, \quad \dot{L} = (G \cos B)^{-1}W_\xi, \quad \dot{h} = W_\zeta. \quad (2)$$

**Блок № 3.** Алгоритм обчислення кутових швидкостей і моментів для управління платформою:

$$\omega_\xi = -\dot{B} = -Q^{-1}W_\eta, \quad \omega_\eta = \dot{L} \cos B = W_\xi G^{-1},$$

$$\omega_\zeta = \dot{L} \sin B = W_\xi G^{-1} \operatorname{tg} B, \quad M_1 = -H\omega_\xi, \quad (3)$$

$$M_2 = H(\omega_\eta + \Omega \cos B), \quad M_3 = H(\omega_\zeta + \Omega \sin B).$$

У співвідношеннях (1) – (3) прийняті такі позначення:  $W_\xi, W_\eta, W_\zeta$  – проекції шляхової швидкості руху ЛА на відповідні осі ГСП;  $a_\xi, a_\eta, a_\zeta$  – проекції показань акселерометрів на відповідні осі ГСП;  $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$  – проекції кутової швидкості обертання ГСП на її власні осі;  $\Omega$  – кутова швидкість обертання Землі;  $g_{e0}$  – прискорення вільного падіння на екваторі;  $a$  – велика напіввісь земного еліпсоїда;  $Q$  – радіус кривизни меридіанного перетину еліпсоїда;  $G$  – радіус кривизни еліпсоїда в першому вертикалі;  $H$  – величина кінетичного моменту гіроскопів ГСП.

Радіуси кривизни головних нормальних перетинів земного еліпсоїда, що входять у співвідношення (2), (3), є функціями геодезичної широти і визначаються співвідношеннями [11, 12]:

$$Q = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2}} + h, \quad G = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 B)^{1/2}} + h, \quad (4)$$

де  $e$  – ексцентриситет земного еліпсоїда.

У розглянутій схемі ідеального функціонування ІНС використовувалися точні алгоритми счислення шляху. За відсутністю інструментальних похибок вони забезпечують абсолютну відповідність роботи ІНС з запропонованим (номінальним) режимом, при якому осі  $хуz$  ГСП (рис. 1) точно збігаються з тригранником  $\xi\eta\zeta$ , що є опорним для даної ІНС, а обчислені в ІНС швидкості та координати збігаються з їх дійсними значеннями. На практиці акселерометри, що входять до складу реальних ІНС, мають інструментальні похибки  $a_{bx}(t), a_{by}(t), a_{bz}(t)$ , а гіроскопи – кутові швидкості дрейфу  $\omega_{bx}(t), \omega_{by}(t), \omega_{bz}(t)$ .

Тригранник  $хуz$ , що жорстко зв'язаний з гіроплатформою, вважаючи на похибки, які зумовлені неточним виставленням ГСП на старті та дрейфом гіроскопів, відхиляється від номінального свого положення  $\xi\eta\zeta$  на малі кути  $\alpha(t), \beta(t)$  і  $\gamma(t)$  (рис. 1). При цьому кут  $\alpha$  є похибкою кутового положення ГСП по азимуту, а кути  $\beta$  та  $\gamma$  – похибками кутового положення ГСП відносно горизонту. Кути  $\beta$  та  $\gamma$  вважаються позитивними, якщо осі  $x$  і  $y$  ГСП підіймаються над площиною обрїю [13]. Крім того, початкові значення швидкостей і координат вводяться в обчислювальну систему з деякими похибками.

Зазначені вхідні похибки викликають появу похибок ІНС у визначенні поточних швидкостей і координат ЛА, а також кутів гіроскопічного курсу, крену та тангажу. Однак, діапазон вихідних похибок ІНС є невеликим [11, 14], що дозволяє застосувати для дослідження динаміки похибок ІНС відомі [7] методи лінеаризації функцій.

Аналіз похибок ІНС можна провести з використанням рівнянь у варіаціях [15], які є лінеаризованими рівняннями першого наближення щодо вихідних похибок системи, праві частини котрих будуть складатися з лінійної комбінації збурювань (похибок) на вході розглянутої системи. При складанні рівнянь врахуємо такий факт. Вхідні похибки реальних ІНС є величинами такого ж порядку малості, як і значення ексцентриситету земного еліпсоїда [11]. Це дозволяє зневажити несферичністю Землі, не враховуючи на величини другого і більш високих порядків малості, відповідно даних малих величин, що значно спрощує подальші розрахунки без зниження порядку точності обчислень.

Розглянемо динаміку утворення похибок у блоку обчислення кутових швидкостей і моментів.

У процесі реального функціонування ІНС, величини  $W_\xi$ ,  $W_\eta$ ,  $B$  та  $h$ , необхідні для обчислення керуючих моментів  $M_1$ ,  $M_2$  і  $M_3$  за формулами (3), бувають відомі з похибками:

$$W_\xi^* = W_\xi + \Delta W_\xi, \quad W_\eta^* = W_\eta + \Delta W_\eta, \\ B^* = B + \Delta B, \quad h^* = h + \Delta h. \quad (5)$$

В (5) та далі верхній індекс «\*» – є символом реальних вимірювань (обчислень), а символ « $\Delta$ » визначає мале відхилення реальної величини від номінальної. Виходячи з цього, моменти:

$$M_1^{obch} = H_1 \omega_{a\xi}^{obch}, \quad M_2^{obch} = H_2 \omega_{a\eta}^{obch}, \quad M_3^{obch} = H_3 \omega_{a\zeta}^{obch} \quad (6)$$

будуть відрізнятися від номінальних значень на малі величини:

$$\Delta M_1^{obch} = H_1 \Delta \omega_{a\xi}^{obch}, \quad \Delta M_2^{obch} = H_2 \Delta \omega_{a\eta}^{obch}, \quad (7) \\ \Delta M_3^{obch} = H_3 \Delta \omega_{a\zeta}^{obch}.$$

Крім того, на гіроскопи ГСП будуть накладатися в силу тертя, дебалансів, тощо, ще й збурюючи моменти  $M_{b1}$ ,  $M_{b2}$  і  $M_{b3}$ . Тобто, до гіроскопів ГСП будуть прикладені реальні моменти:

$$M_1^* = M_1^{obch} + M_{b1} = M_1 + H_1 \Delta \omega_{a\xi}^{obch} + M_{b1}, \\ M_2^* = M_2^{obch} + M_{b2} = M_2 + H_2 \Delta \omega_{a\eta}^{obch} + M_{b2}, \quad (8) \\ M_3^* = M_3^{obch} + M_{b3} = M_3 + H_3 \Delta \omega_{a\zeta}^{obch} + M_{b3}.$$

Під дією моментів  $M_1^*$ ,  $M_2^*$  і  $M_3^*$  ГСП почне обертатися у світовому просторі з реальними кутовими швидкостями:

$$\omega_{ax} = \frac{M_1^*}{H_1} = \frac{M_1}{H_1} + \Delta \omega_{a\xi}^{obch} + \omega_{b1}, \\ \omega_{ay} = \frac{M_2^*}{H_2} = \frac{M_2}{H_2} + \Delta \omega_{a\eta}^{obch} + \omega_{b2}, \quad (9) \\ \omega_{az} = \frac{M_3^*}{H_3} = \frac{M_3}{H_3} + \Delta \omega_{a\zeta}^{obch} + \omega_{b3},$$

де  $\omega_{bi} = M_{bi} H_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2, 3$  – дрейфи гіроскопів платформи.

Враховуючи, що відповідно до (3) мають місце рівності  $M_1 H_1^{-1} = \omega_{a\xi}$ ,  $M_2 H_2^{-1} = \omega_{a\eta}$  та  $M_3 H_3^{-1} = \omega_{a\zeta}$ , із співвідношень (9) одержимо рівняння похибок абсолютних кутових швидкостей ГСП:

$$\Delta \omega_{ax} = \omega_{ax} - \omega_{a\xi} = \Delta \omega_{a\xi}^{obch} + \omega_{b1}, \\ \Delta \omega_{ay} = \omega_{ay} - \omega_{a\eta} = \Delta \omega_{a\eta}^{obch} + \omega_{b2}, \quad (10) \\ \Delta \omega_{az} = \omega_{az} - \omega_{a\zeta} = \Delta \omega_{a\zeta}^{obch} + \omega_{b3}.$$

Щоб знайти значення  $\Delta \omega_{a\xi}^{obch}$ ,  $\Delta \omega_{a\eta}^{obch}$  та  $\Delta \omega_{a\zeta}^{obch}$ , вхідні до (10), необхідно провести лінеаризацію (3) щодо малих величин  $\Delta W_\xi$ ,  $\Delta W_\eta$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta h$  та  $e$ .

В результаті лінеаризації (3), одержимо:

$$\Delta \omega_\xi = -\frac{\Delta W_\eta}{a+h} + \frac{W_\eta \Delta h}{(a+h)^2}, \quad \Delta \omega_\eta = \frac{\Delta W_\xi}{a+h} - \frac{W_\xi \Delta h}{(a+h)^2}, \\ \Delta \omega_\zeta = \frac{tg B \Delta W_\xi}{a+h} - \frac{W_\xi tg B \Delta h}{(a+h)^2} + \frac{W_\xi (1+tg^2 B) \Delta B}{a+h}, \quad (11)$$

$$\Delta \Omega_\xi = 0, \quad \Delta \Omega_\eta = -\Omega \sin B \Delta B, \quad \Delta \Omega_\zeta = \Omega \cos B \Delta B, \quad (12)$$

$$\Delta \omega_{a\xi}^{obch} = \Delta \omega_\xi + \Delta \Omega_\xi, \quad \Delta \omega_{a\eta}^{obch} = \Delta \omega_\eta + \Delta \Omega_\eta, \\ \Delta \omega_{a\zeta}^{obch} = \Delta \omega_\zeta + \Delta \Omega_\zeta. \quad (13)$$

Перейдемо до виводу рівнянь для кутових похибок  $\alpha$ ,  $\beta$  та  $\gamma$  ГСП. Матриця  $\Delta U_M$  направляючих косинусів між тригранниками  $xuz$  і  $\xi\eta\zeta$  з урахуванням малості кутів  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\gamma$  буде дорівнювати [12]:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Delta U_M \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \Delta \tilde{U}_M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ -\alpha & 0 & \beta \\ -\gamma & -\beta & 0 \end{pmatrix} \\ \Delta U_M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ -\alpha & 1 & \beta \\ -\gamma & -\beta & 1 \end{pmatrix} = E + \Delta \tilde{U}_M, \quad (14)$$

де  $E$  – одинична матриця. У співвідношеннях (14) СК  $\xi\eta\zeta$  потрібно розглядати як опорну, відносно якої рухається СК  $xuz$ .

Відносно до інерціальної СК  $X_i Y_i Z_i$ , СК  $\xi\eta\zeta$  та СК  $xuz$  будуть обертатися з кутовими швидкостями  $\omega_{a\xi}$ ,  $\omega_{a\eta}$ ,  $\omega_{a\zeta}$  і  $\omega_{ax}$ ,  $\omega_{ay}$ ,  $\omega_{az}$  відповідно. Введемо в розгляд матриці  $U_i$  і  $U_i^*$ , що задають положення СК  $\xi\eta\zeta$  та СК  $xuz$  щодо СК  $X_i Y_i Z_i$ :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = U_i \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U_i^* \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Нижній індекс « $i$ » є пов'язаним з інерційністю системи, а індекс «\*» символізує реальність руху платформи. Якщо відомий вектор обертання рухомої СК щодо нерухомої, а також відоме початкове значення  $U_0$  матриці направляючих косинусів, то поточне значення матриці  $U(t)$  може бути обчислене для будь-якого моменту часу  $t$  шляхом інтегрування рівнянь Пуассона [5, 7]:

$$\dot{U}(t) = -PU(t), U(t_0) = U_0, \quad (16)$$

де  $P$  – матриця кутових швидкостей обертання рухомої СК. Далі одержуємо матричні диференційні рівняння Пуассона для матриць  $U_i$  та  $U_i^*$ :

$$\dot{U}_i = -P_i U_i, U_i(t_0) = U_{i0}, \quad \dot{U}_i^* = -P_i^* U_i^*, U_i^*(t_0) = U_{i0}^*, \quad (17)$$

$$\text{де } P_i = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{a\zeta} & \omega_{a\eta} \\ \omega_{a\zeta} & 0 & -\omega_{a\xi} \\ -\omega_{a\eta} & \omega_{a\xi} & 0 \end{pmatrix}, P_i^* = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{az} & \omega_{ay} \\ \omega_{az} & 0 & -\omega_{ax} \\ -\omega_{ay} & \omega_{ax} & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_i^* = P_i + \Delta P.$$

Матриці  $U_i$ ,  $U_i^*$  та  $\Delta U_M$  зв'язані між собою [9]:

$$U_i^* = \Delta U_M U_i. \quad (18)$$

Підставимо (18) у (17) та, враховуючи, що добуток матриць  $\Delta P \Delta \tilde{U}_M$  має другий порядок малості, одержимо:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{U}_M U_i + \Delta U_M (-P_i U_i) &= -(P_i + \Delta P) \Delta U_M U_i, \\ \Delta \dot{U}_M &= \Delta U_M P_i - P_i \Delta U_M - \Delta P (E + \Delta \tilde{U}_M) \approx, \\ &\approx \Delta U_M P_i - P_i \Delta U_M - \Delta P, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{де } \Delta P(t) = P_i^*(t) - P_i(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\omega_{az} & \Delta\omega_{ay} \\ \Delta\omega_{az} & 0 & -\Delta\omega_{ax} \\ -\Delta\omega_{ay} & \Delta\omega_{ax} & 0 \end{pmatrix}.$$

З рівняння (19) випливають диференційні рівняння для кутових похибок  $\alpha$ ,  $\beta$  та  $\gamma$  платформи, надані в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dot{\alpha} & \dot{\gamma} \\ -\dot{\alpha} & 0 & \dot{\beta} \\ -\dot{\gamma} & -\dot{\beta} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ -\alpha & 1 & \beta \\ -\gamma & -\beta & 1 \end{pmatrix} P_i - P_i \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ -\alpha & 1 & \beta \\ -\gamma & -\beta & 1 \end{pmatrix} - \Delta P. \quad (20)$$

Якщо перейти від матричного виразу (20) до скалярних виразів, то одержимо:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \gamma\omega_{a\xi} + \beta\omega_{a\eta} + \Delta\omega_{az}; \quad \dot{\beta} = -\alpha\omega_{a\eta} - \gamma\omega_{a\xi} + \Delta\omega_{ax} \\ \dot{\gamma} &= -\alpha\omega_{a\xi} + \beta\omega_{a\zeta} - \Delta\omega_{ay}. \end{aligned} \quad (21)$$

Підставляючи в (21) співвідношення (10), що лінеаризовані, щодо величини ексцентриситету значення  $\omega_{a\xi}$ ,  $\omega_{a\eta}$  та  $\omega_{a\zeta}$ , остаточно одержуємо:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \left( \frac{W_\xi}{a+h} + \Omega \cos B \right) \beta - \frac{W_\eta \gamma}{a+h} + \frac{tgB \Delta W_\xi}{a+h} + \\ &+ \left( \frac{W_\xi (1+tg^2 B)}{a+h} + \Omega \cos B \right) \Delta B - \frac{W_\xi tgB \Delta h}{(a+h)^2} + \omega_{e3}; \end{aligned}$$

$$\dot{\beta} = - \left( \frac{W_\xi}{a+h} + \Omega \cos B \right) \alpha - \left( \frac{W_\xi tgB}{a+h} + \Omega \sin B \right) \gamma - \quad (22)$$

$$- \Delta W_\eta / (a+h) + W_\eta \Delta h / (a+h)^2 + \omega_{e1};$$

$$\dot{\gamma} = \Omega \sin B \Delta B + W_\xi \Delta h / (a+h)^2 - \omega_{e2} +$$

$$+ \frac{W_\eta \alpha}{a+h} + \left( \frac{W_\xi tgB}{a+h} + \Omega \sin B \right) \beta - \frac{\Delta W_\xi}{a+h}.$$

Отримуємо рівняння похибок шляхових швидкостей:

$$\Delta W_\xi = W_x^* - W_\xi, \quad \Delta W_\eta = W_y^* - W_\eta, \quad \Delta W_\zeta = W_z^* - W_\zeta.$$

З (14) випливає, що проекції  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  вектора  $\bar{a}$  позірного прискорення є такими:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ -\alpha & 1 & \beta \\ -\gamma & -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Реальні показання  $a_x^*$ ,  $a_y^*$  та  $a_z^*$  акселерометрів будуть дорівнювати:

$$a_x^* = a_x + a_{bx}, \quad a_y^* = a_y + a_{by}, \quad a_z^* = a_z + a_{bz}, \quad (24)$$

де  $a_{bx}$ ,  $a_{by}$ ,  $a_{bz}$  – інструментальні похибки акселерометрів.

На підставі (23) та (24) похибки у вимірюванні наданих прискорень можна представити виразами:

$$\Delta a_\xi = a_x^* - a_\xi = \alpha a_\eta + \gamma a_\zeta + a_{bx},$$

$$\Delta a_\eta = a_y^* - a_\eta = -\alpha a_\xi + \beta a_\zeta + a_{by}, \quad (25)$$

$$\Delta a_\zeta = a_z^* - a_\zeta = -\gamma a_\xi - \beta a_\eta + a_{bz}.$$

Шляхом лінеаризації рівнянь (1) щодо малих величин:  $\Delta a_\xi$ ,  $\Delta a_\eta$ ,  $\Delta a_\zeta$ ,  $\Delta W_\xi$ ,  $\Delta W_\eta$ ,  $\Delta W_\zeta$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta$ , та  $e$ , враховуючи (11) – (13) та (25), отримуємо диференційні рівняння:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{W}_\xi &= a_\eta \alpha + a_\zeta \gamma + \frac{tgB W_\eta - W_\zeta}{a+h} \Delta W_\xi + \frac{W_\xi tgB}{a+h} \Delta W_\eta + \\ &+ 2\Omega \Delta W_\eta \sin B - \left( \frac{W_\xi}{a+h} + 2\Omega \cos B \right) \Delta W_\zeta + \\ &+ \left( 2\Omega \sin B W_\zeta + \frac{W_\eta W_\xi (1+tg^2 B)}{a+h} + 2W_\eta \Omega \cos B \right) \Delta B - \\ &- W_\xi (tgB W_\eta - W_\zeta) / (a+h)^2 \cdot \Delta h + a_{e\xi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{W}_\eta &= -a_\xi \alpha + a_\zeta \beta - \left( \frac{2W_\xi tgB}{a+h} + 2\Omega \sin B \right) \Delta W_\xi - \\ &- \frac{W_\zeta}{a+h} \Delta W_\eta - \frac{W_\eta}{a+h} \Delta W_\zeta - \frac{W_\xi^2 (1+tg^2 B)}{a+h} \Delta B - \\ &- 2W_\xi \Omega \cos B \cdot \Delta B + \frac{W_\eta W_\zeta + W_\xi^2 tgB}{(a+h)^2} \Delta h + a_{e\eta}; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{W}_\zeta &= -a_\eta \beta - a_\xi \gamma + \left( \frac{2W_\xi}{a+h} + 2\Omega \cos B \right) \Delta W_\xi + \frac{2W_\eta}{a+h} \times \\ &\times \Delta W_\eta - 2\Omega \sin B W_\zeta \Delta B + \left( \frac{2ga^2}{(a+h)^3} - \frac{W_\eta^2 + W_\xi^2}{(a+h)^2} \right) \Delta h + a_{e\zeta}. \end{aligned}$$

Проведемо лінеаризацію рівнянь виразу (2) та отримусемо диференціальні рівняння для  $\Delta B$ ,  $\Delta L$ ,  $\Delta h$ :

$$\Delta \dot{L} = \frac{\Delta W_{\xi}}{(a+h) \cos B} + \frac{W_{\xi} \sin B \Delta B}{(a+h) \cos^2 B} - \frac{W_{\xi} \Delta h}{(a+h)^2 \cos B}; \quad (27)$$

$$\Delta \dot{B} = \Delta W_{\eta} / (a+h) - W_{\eta} \Delta h / (a+h)^2; \quad \Delta \dot{h} = \Delta W_{\zeta}.$$

Сукупність з дев'яти диференціальних рівнянь (22), (26) та (27) із фазовими координатами:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\Delta W_{\xi}$ ,  $\Delta W_{\eta}$ ,  $\Delta W_{\zeta}$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta L$  та  $\Delta h$  є лінійною моделлю похибок ІНС розглянутого типу.

Вхідними сигналами до системи є інструментальні похибки гіроскопів:  $\omega_{вх}$ ,  $\omega_{ву}$ ,  $\omega_{вz}$  та акселерометрів  $a_{вх}$ ,  $a_{ву}$ ,  $a_{вz}$ . Початкові умови:  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\Delta W_{\xi 0}$ ,  $\Delta W_{\eta 0}$ ,  $\Delta W_{\zeta 0}$ ,  $\Delta B_0$ ,  $\Delta L_0$ ,  $\Delta h_0$  залежать від точності початкового виставлення ІНС.

Застосування описуваної співвідношеннями (2), (26) і (27) лінійної моделі похибок ІНС, для кількісної оцінки досліджуваних характеристик, вимагає опису вхідних до неї значень:  $a_{вх}(t)$ ,  $a_{ву}(t)$ ,  $a_{вz}(t)$ ,  $\omega_{вх}(t)$ ,  $\omega_{ву}(t)$ ,  $\omega_{вz}(t)$  або як детермінованих функцій часу, або у вигляді реалізації випадкових процесів. Зазначені похибки визначаються безліччю різноманітних факторів і у загальному випадку носять випадковий характер.

Кутова швидкість  $\omega_{в}(t)$  дрейфу двоступеневого, або однієї з осей триступеневого гіроскопа, у реальних умовах роботи є випадковою функцією часу й може розглядатися [6] як випадковий процес виду:

$$\omega_{в}(t) = \omega_{в0} + \omega_{в1}(t), \quad (28)$$

де  $\omega_{в0}$  – постійна складова дрейфу гіроскопа;  $\omega_{в1}$  – флуктуаційна складова дрейфу гіроскопа.

Для опису повного дрейфу гіроскопа найбільш коректним є надання його у вигляді реалізації стаціонарних випадкових процесів із нульовими математичними сподіваннями та кореляційною функцією:

$$K_{\zeta}(\tau) = \sigma_{\zeta 0}^2 + \sigma_{\zeta 1}^2 e^{-\mu_{\zeta} |\tau|}, \quad \tau = t_2 - t_1, \quad (29)$$

де  $\sigma_{\zeta 0}^2$ ,  $\sigma_{\zeta 1}^2$  – дисперсії постійної складової дрейфу гіроскопа та флуктуаційної складової дрейфу гіроскопа;  $\mu_{\zeta}$  – коефіцієнт згасання кореляційної функції.

Величина систематичного дрейфу конкретного екземпляру гіроскопа є практично постійною і незначно змінюється від запуску до запуску приладу, що дозволяє описати її у вигляді стохастичного диференційного рівняння [4]:

$$\dot{\omega}_{\zeta 0} = 0, \quad \omega_{\zeta 0}(t_0) = \omega_{\zeta 0}(0) \in N(0, \sigma_{\zeta 0}). \quad (30)$$

Флуктуаційну складову  $\omega_{в1}(t)$  дрейфу гіроскопа, яка є стаціонарним гаусовим випадковим процесом, можна трактувати як вихідний сигнал ланки з передатною функцією  $W(p) = \sqrt{2\sigma_{\zeta 1}^2 \mu_{\zeta}} / (p + \mu_{\zeta})$ , на вхід якої надходить білий шум  $\eta'(t)$  з одиничною спектральною щільністю.

З останнього зрозуміло, що стаціонарний процес  $\omega_{в1}(t)$  можливо представити у вигляді стохастичного диференційного рівняння першого порядку:

$$\dot{\omega}_{\zeta 1} = -\mu \omega_{\zeta 1} + \sqrt{2\sigma_{\zeta 1}^2 \mu} \eta' = -\mu \omega_{\zeta 1} + \eta; \quad (31)$$

$$\omega_{\zeta 1}(t_0) = \omega_{\zeta 1}(0) \in N(0, \sigma_{\zeta 1}),$$

де  $\eta = \sqrt{2\sigma_{\zeta 1}^2 \mu} \eta'$  – інтенсивність безперервного білого шуму.

Для типових ІНС і узагальнених траєкторій руху ЛА граничні ( $3\sigma$ ) значення коефіцієнтів, що входять у (31), можна приблизно припускати рівними:

$$3\sigma_{\tau 1} = 0,55 \dots 0,9^0 / (z \cdot g) \text{ та } \mu_{\tau}^{-1} = 15 \dots 45 \text{ хв.}$$

Розкид значень  $\sigma_{\tau 1}$  і  $\mu_{\tau}^{-1}$  пояснюється тим, що дрейфи гіроскопів збільшуються не тільки з часом, але і з ростом перевантажень на маршруті. Для маневрових маршрутів  $\sigma_{\tau 0}$  і  $\sigma_{\tau 1}$  приймають більші значення, а величина  $\mu_{\tau}^{-1}$ , яку можна трактувати як часовий радіус кореляції, зменшується [11].

Отже, похибки акселерометрів у загальному випадку можна уявити [3] незалежними білими шумами з інтенсивностями  $2\sigma_{a1}^2 \mu_a^{-1}$ .

Як і для гіроскопів, граничні ( $3\sigma$ ) значення коефіцієнтів  $\sigma_{a1}$  та  $\mu_a^{-1}$  типових акселерометрів можна приблизно припустити [2] рівними:

$$3\sigma_{a1} = 1,1 \cdot 10^{-3} \dots 1,2 \cdot 10^{-3} n_{\text{ср}g}, \quad \mu_a^{-1} = 5 \dots 10 \text{ хв,}$$

де  $n_{\text{ср}}$  – середнє перевантаження на маршруті.

## Висновки

Таким чином, запроповану математичну модель похибок ІНС складає сукупність співвідношень, що отримані (22), (26), (27), (28), (30), (31).

Ефективність компенсації зростаючих з часом функціонування похибок ІНС залежить від того, наскільки точно апріорно відомі чисельні значення дрейфів гіроскопів і похибок акселерометрів. Адекватність запропонованої математичної моделі похибок ІНС реальним процесам буде підтверджена результатами імітаційного моделювання з використанням нелінійної моделі формування похибок ІНС.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. К вопросу построения автоматизированной системы мониторинга параметров высокоточного навигационного поля / Каретников В.В., Пашенко И.В., Соколов А.И., Кузнецов И.Г. // Морская радиоэлектроника. – 2015. – № 2 (52). – С. 24-27.
2. Соловьев И. Морская радиоэлектроника / И. Соловьев. – Санкт-Петербург: Политехника, 2003. – 185 с.
3. Rogers, R.M. (2003), "Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems", AIAA Educational Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, Reston, VA.
4. Grewal M.S., Weill L.R., Andrews A.P. (2007), "Global Positioning Systems, Inertial navigation and integration", Wiley, New York.
5. Алешин Б.С. Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии / Б.С. Алешин, К.К. Веремченко. – М.: Наука, 2006. – 424 с.
6. Admiralty list of radio signals "Global maritime distress and safety system (GMDSS)". Vol 5. NP 285. 2000. – 338 p.
7. Герасимов С.В. Розробка та дослідження методу розрахунку достовірності вимірювального контролю параметрів

- радіотехнічних систем морського транспорту / С.В. Герасимов, Ю.Є. Шапран, В.В. Кірвас // Системи озброєння і військова техніка. – 2017. – № 4 (52). – С. 5-10.
8. Басов В.Г. Измерительные сигналы и функциональные устройства их обработки / В.Г. Басов. – Минск, 2013. – 119 с.
  9. Norman Friedman (2006), “*The Naval Institute Guide to World Naval Weapon System*”, *Naval Institute Press*, 858 p.
  10. Страхов А.Ф. Автоматизированные измерительные комплексы / А.Ф. Страхов. – М.: Энергоиздат, 1990. – 216 с.
  11. Герасимов С.В. Модель похибок навігації в аномальному гравітаційному полі Землі / С.В. Герасимов, Д.В. Макаруч, О.І. Костенко // Збірник наукових праць ХНУПС. – 2018. – № 3(57). – С. 109-114. – DOI: 10.30748/zhups.2018.57.16.
  12. Ruban, I. Redistribution of base stations load in mobile communication networks / I. Ruban, H. Kuchuk, A. Kovalenko // *Innovative technologies and scientific solutions for industries*. – 2017. – No 1 (1)– P. 75-81. – DOI : <https://doi.org/10.30837/2522-9818.2017.1.075>
  13. Borisenko M.V., Gerasimov S.V., Kostenko O.I., Makarchuk D.V. (2018), Development of optimum navigation information processing algorithm, *Science and Technology of the Air Force of Ukraine*, No. 3(32), pp. 38-44. – DOI: 10.30748/nitps.2018.32.06.
  14. Qriffsiths B.E. Optimal control of jump-linear gaussian systems / B.E. Qriffsiths, K.A. Loparo // *Int. J. of control*. – Vol. 42, No. 4. – 1985. – P. 791-819.
  15. Герасимов С.В. Методика обґрунтування номенклатури параметрів контролю радіотехнічних систем і призначення їх допустимих відхилень / С.В. Герасимов, В.В. Грідіна // Системи обробки інформації. – 2018. – Вип. 2 (153). – С. 159-164. – DOI: <https://doi.org/10.30748/soi.2018.153.20>.

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. С. В. Козелков,  
Державний університет телекомунікацій, Київ

Received (Надійшла) 11.10.2018

Accepted for publication (Прийнята до друку) 05.12.2018

### Особенности определения точности измерений инерциальных приборов определения координат

В. В. Герасимов, А. В. Коломийцев, В. В. Пустоваров

В статье показано, что в основу функционирования существующих приборов инерциальных навигационных систем летательных аппаратов положено свойство быстро оборачиваемых гироскопов хранить неизменным направление оси вращения в пространстве (гироскопический эффект). При этом, в общем случае, погрешности гироскопических устройств (приборов) зависят как от их конструкции, так и от условий их работы. Обоснована актуальная научная задача – проведение анализа особенностей определения точности измерений инерциальных навигационных систем при расчете координат летательного аппарата. Приведено, что известный метод частичной компенсации погрешностей измерений аналитическим путем на основе вычисления их значений, является несовершенным. Предлагается для вычисления и дальнейшей компенсации погрешностей навигационных измерений разработать математическую модель погрешностей инерциальных навигационных систем. Такая модель аналитически описывает связь между входными погрешностями инерциальных навигационных систем, обусловленными недостатками гироскопов и акселерометра, и ее исходными погрешностями в определении координат летательного аппарата. Предложены три составляющие математической модели – блоки расчета координат летательного аппарата. Получена совокупность аналитических соотношений, которая составляет предложенную математическую модель погрешностей инерциальных навигационных систем. Обоснованно, что диапазон исходных погрешностей инерциальных навигационных систем является небольшим, что позволяет применить для исследования динамику погрешностей известные методы линеаризации функций. Рассмотрена динамика образования погрешностей в блоке вычисления угловых скоростей и моментов. Эффективность компенсации растущих со временем функционирования погрешностей инерциальных навигационных систем зависит от того, насколько точно априорно известны численные значения дрейфов гироскопов (постоянной и флуктуационной составляющих) и погрешностей акселерометра. Дальнейшие исследования предлагается направить для проверки адекватности предложенной математической модели погрешностей инерциальных навигационных систем реальным процессам с помощью результатов имитационного моделирования с использованием нелинейной модели формирования погрешностей.

**Ключевые слова:** инерциальная навигационная система, летательный аппарат, измерение, точность, координаты.

### Features of determination of exactness of measuring of inertial devices of determination of coordinates

S. Herasimov, O. Kolomiitsev, V. Pustovarov

It is shown in the article, that property of the quickly turned gyroscopes to keep unchanging direction of axis of rotation in space (gyroeffect) is fixed in basis of functioning of existent devices of inertial navigators of aircrafts. Thus, in general case, the errors of gyroscopic devices (devices) depend both on their construction and from the terms of their work. An actual scientific task is reasonable is realization of analysis of features of determination of exactness of measuring of inertial navigators at the calculation of coordinates of aircraft. It is resulted, that the known method of partial indemnification of errors of measuring an analytical way on the basis of calculation of their values, is imperfect. It is suggested for a calculation and further indemnification of errors of the navigation measuring to work out the mathematical model of errors of inertial navigators. Such model analytically describes connection between the entrance errors of inertial navigators, conditioned lacks of gyroscopes and accelerometer, and her initial errors in determination of coordinates of aircraft. Offered three constituents of mathematical model are blocks of calculation of coordinates of aircraft. The aggregate of analytical correlations, that makes the offered mathematical model of errors of inertial navigators, is got. Reasonably, that a range of initial errors of inertial navigators is small, that allows to apply for research the dynamics of errors the known methods of linearizing of functions. The dynamics of formation of errors is considered in the block of calculation of anglators and moments. Efficiency of indemnification growing in course of time functioning of errors of inertial navigators depends on that, as far as exactly the numeral values of displacement gyroscopes (permanent and fluctuation constituents) and errors of accelerometer are known a priori. Further researches it is suggested to direct for verification of adequacy of the offered mathematical model of errors of inertial navigators to the real processes by means of results of imitation design with the use of nonlinear model of forming of errors.

**Keywords:** inertial navigator, aircraft, measuring, exactness, coordinates.