УДК 519.213 **doi: 10.26906/SUNZ.2018.5.069**

С. В. Гадецкая, В. Ю. Дубницкий

Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ Университета банковского дела, Харьков, Украина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, ЗАДАННОЙ УСЕЧЁННЫМ ПОКАЗАТЕЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Поставлена задача об определении дифференциальной энтропии случайной величины, заданной усечённым распределением. Получены решения этой задачи для интервалов усечения следующих видов: [*a*, *b*], [0, *a*], [*a*, $+\infty$]. Приведено решение поставленной задачи для усечённого показательного распределения. Показано, что для показательного распределения, область определения которого ограничена только слева, величина энтропии, вычисленная справа от точки усечения, не зависит от расположения этой точки на числовой оси и равна энтропии, вычисленной вдоль всей области определения. Приведен способ численного интегрирования интеграла с бесконечным верхним пределом, позволяющий свести задачу к численному интегрированию в конечных пределах. Проведен численный анализ полученных решений. Введено понятие коэффициента усечения, равного отношению энтропии, вычисленной для случайной величины, заданной усечённым распределением, к энтропии, вычисленной для случайной величины, определённой на всей области её возможных значений, и вычислены его значения для показательного распределения. Для энтропии показательного распределения показана связь полученных решений с неполными гамма-функциями.

Ключевые слова: энтропия, усечённое распределение, показательное распределение, гамма-функция, неполная гамма-функция.

Введение

Предположим, что для непрерывной случайной величины X известны функция распределения $F(X)$ и плотность распределения $f(x)$. Возможные значения случайной величины X определены на отрезках $[0,a]$, $[a,b]$ и промежутке $[a,+\infty)$. Функционал вида:

$$H[-\infty,+\infty] = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln f(x)dx \ (\textit{нит}), \tag{1}$$

называют приведенной [1] или дифференциальной энтропией [2] Шеннона. В связи с тем, что в условии (1) использовано основание натуральных логарифмов, единицей измерения энтропии принят *нит,* далее эта единица измерения используется по умолчанию. В рамках данной работы будет использован термин «энтропия». Если случайная величина X определена на интервале $0 < x < +\infty$, то условие (1) примет вид:

$$H[0,\infty] = -\int_{0}^{+\infty} f(x)\ln f(x)dx. \tag{2}$$

В задачах, относящихся к различным предметным областям, указанным, например, в работах [3-6], используют ограниченные случайные величины $\widehat{X}$, определённые в работе [7, с. 746] таким образом:

$$\widehat{X} = \begin{cases} X, & \textit{если} \quad |X| \le h, \\ 0, & \textit{если} \quad |X| > h. \end{cases} \tag{3}$$

Исходя из принципа историзма, следует считать первым упоминанием использования усечённых случайных величин библейский сюжет об избиении младенцев, описанный в работе [8, Мф 2:16] следующим образом: «Тогда Ирод послал избить всех младенцев в Вифлееме и во всех пределах его, от двух лет и ниже по времени». Таким образом, считая рост младенца случайной величиной, для решения поставленной задачи была использована усечённая случайная величина. Плотность усечённой на интервале (a,b) случайной величины X, имеющей функцию распределения $F(x)$, в работе [7, с. 747] определена так:

$$f_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le a, \\ \dfrac{f(x)}{F(b)-F(a)}, & \textit{если} \quad a < x \le b, \\ 0, & \textit{если} \quad x > b. \end{cases} \tag{4}$$

Используя условия (1 – 4), определим энтропию случайной величины, заданной усечённым распределением:

$$H[a,b] = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad x \le a, \\ -\displaystyle\int_a^b \left(\dfrac{f(x)}{F(b)-F(a)} \times \ln \dfrac{f(x)}{F(b)-F(a)} \right) dx, & \begin{matrix}\textit{если} \\ a < x \le b,\end{matrix} \\ 0, & \textit{если} \quad x > b. \end{cases} \tag{5}$$

Анализ литературы. Авторам данного сообщения удалось найти только сборник примеров и задач по теории информации [9, с. 37], где приведена задача, для решения которой требуется вычислить энтропию усечённой нормально распределённой случайной величины. В цитируемой работе решение задачи не приведено, приведен лишь её ответ. В работе [2] получена энтропия усечённого только на отрезке $[a,b]$ нормального распределения. Решение задачи в общем виде и для случая показательного распределения в доступной авторам данного сообщения литературе не найдено.

Постановка задачи: Найти общий вид решения задачи определения дифференциальной энтропии Шеннона для случайной величины, заданной усечённым распределением и получить её решение для усечённого показательного распределения.

Полученные результаты

При изложении процесса получения результатов поставленной задачи в целях сохранения преемственности принят уровень подробности их получения, согласованный с работой [2]. Пусть плотность вероятности $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Используя условие (5), получим:

$$H[a,b] = -\int_a^b \frac{f(x)}{F(b)-F(a)} \ln \frac{f(x)}{F(b)-F(a)} dx = = -\frac{1}{F(b)-F(a)} \int_a^b f(x)\left[\ln f(x) - \ln(F(b)-F(a))\right] dx. \tag{6}$$

Преобразуя выражение (6), получим, что:

$$H[a,b] = -\frac{1}{F(b)-F(a)} \int_a^b f(x)\ln f(x) dx + +\frac{1}{F(b)-F(a)} \cdot \ln(F(b)-F(a)) \cdot \int_a^b f(x) dx. \tag{7}$$

Из условий (1-2) и работ [10-11] следует, что:

$$\frac{1}{F(b)-F(a)} \int_a^b f(x) dx = 1. \tag{8}$$

Подставив условие (8) в условие (7), получим, что:

$$H[a,b] = -(F(b)-F(a))^{-1} \times \times \int_a^b f(x)\ln f(x) dx + \ln(F(b)-F(a)). \tag{9}$$

Рассмотрим решение задачи в том случае, когда возможные значения случайной величины X определены на отрезке $[0,a]$. Так как для функции распределения вероятности справедливо условие: $F(0)=0$, то используя условие (9), получим, что:

$$H[0,a] = -[F(a)]^{-1} \int_0^a f(x)\ln f(x) dx + \ln F(a). \tag{10}$$

Рассмотрим решение задачи в том случае, когда возможные значения случайной величины X определены на полуинтервале $[a,+\infty)$. Так как для функции распределения вероятности справедливо условие: $F(+\infty)=1$, то, используя условие (9), получим, что:

$$H[a,+\infty) = -(1-F(a))^{-1} \times \times \int_a^{+\infty} f(x)\ln f(x) dx + \ln(1-F(a)). \tag{11}$$

Для удобства дальнейшего применения полученных результатов сведём их в табл. 1.

Таблица 1 – **Дифференциальная энтропия Шеннона для случайной величины *X*, заданной усечённым распределением**

Область определения возможных значений случайной величины X	Дифференциальная энтропия Шеннона случайной величины, заданной усечённым распределением
$-\infty < a < b < +\infty$	$H[a,b] = -\left(F(b)-F(a)\right)^{-1} \times \int_a^b f(x)\ln f(x) dx + \ln\left(F(b)-F(a)\right)$
$0 < x < a$	$H[0,a] = -[F(a)]^{-1} \times \int_0^a f(x)\ln f(x) dx + \ln F(a)$
$a < x < +\infty$	$H[a,+\infty) = -\left(1-F(a)\right)^{-1} \times \int_a^{+\infty} f(x)\ln f(x) dx + \ln\left(1-F(a)\right)$

Рассмотрим применение полученного решения для определения величины энтропии случайной величины, заданной усечённым показательным распределением, функция распределения и плотность вероятности которого во всей области определения вид:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0. \tag{12}$$

Величины $F(b)-F(a)$ и $\ln(F(b)-F(a))$, входящие в условие (9), примут в этом случае вид:

$$F(b)-F(a) = \ln\left(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}\right), \ln F(b) - F(a) = \ln\left(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}\right). \tag{13}$$

Пусть плотность вероятности $f(x)$ определена на $[a,b]$. Тогда, используя условия (9) и (13), получим, что:

$$H[a,b] = = -\int_a^b \lambda e^{-\lambda x} \ln\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx \Big/ \left(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}\right) + +\ln\left(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}\right). \tag{14}$$

Интегрируя числитель условия (14) получим, что:

$$\int_a^b \lambda e^{-\lambda x} \ln\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx = = e^{-a\lambda}\left(\ln\lambda - a\lambda - 1\right) - e^{-b\lambda}\left(\ln\lambda - b\lambda - 1\right). \tag{15}$$

Следовательно,

$$\mathrm{H}\left[a,b\right]=\frac{e^{-\lambda a}\left(\lambda a+1\right)-e^{-\lambda b}\left(\lambda b+1\right)}{e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}}+ \\ +\ln(e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b})-\ln\lambda. \tag{16}$$

Пусть плотность вероятности $f(x)$ определена на $\left[0,a\right]$. Тогда, приняв в условии (16), что $a=0$ и переобозначив $b=a$, получим, что:

$$H\left[0,a\right]=\frac{1-e^{-a\lambda}(a\lambda+1)}{1-e^{-a\lambda}}+ \\ +\ln\left(1-e^{-a\lambda}\right)-\ln\lambda. \tag{17}$$

Принимая в условии (16), что $b=a$, при условии, что $b\to\infty$, получим, что:

$$H\left[a,+\infty\right)=1-\ln\lambda=\ln\frac{e}{\lambda}. \tag{18}$$

В работе [2] показано, что для показательного распределения, заданного, как известно, на всей положительной полуоси, энтропия равна величине:

$$H[0,+\infty)=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\ln\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx=\ln\frac{e}{\lambda}. \tag{19}$$

Из условий (18) и (19) следует важный вывод о том, что для показательного распределения

$$H\left(x\right)=H\left[a,+\infty\right). \tag{20}$$

Иными словами, это означает, что для показательного распределения, область определения которого ограничена только слева, энтропия, вычисленная справа от точки усечения, не зависит от расположения этой точки на числовой оси и равна энтропии, вычисленной вдоль всей числовой оси.

Для удобства пользования сведём полученные результаты в табл. 2.

Таблица 2 – **Дифференциальная энтропия Шеннона для случайной величины, заданной усечённым показательным распределением**

Область определения возможных значений случайной величины X	Дифференциальная энтропия Шеннона случайной величины, заданной усечённым распределением
$-\infty<a<b<+\infty$	$\mathrm{H}\left[a,b\right]=\frac{e^{-\lambda a}\left(\lambda a+1\right)-e^{-\lambda b}\left(\lambda b+1\right)}{e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}}+\ln(e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b})-\ln\lambda$
$0<x<a$	$H\left[0,a\right]=\frac{1-e^{-a\lambda}(a\lambda+1)}{1-e^{-a\lambda}}+\ln\left(1-e^{-a\lambda}\right)-\ln\lambda$
$a<x<+\infty$	$\ln e/\lambda$

Из работы [2] следует, что для основных типов распределений получение в замкнутом виде выражений, приведенных в табл. 1, можно рассматривать как самостоятельную задачу. Решение этой задачи численными методами осложнено тем, что в случае, когда $a<x<+\infty$, требуется вычислять интеграл с бесконечным верхним пределом. В работе [12, с. 105] предложено следующее решение поставленной задачи.

Пусть необходимо вычислить численным методом значение интеграла вида:

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx\,,\quad a>0\,. \tag{21}$$

Выполним замену переменной:

$$x=\frac{a}{1-t},\quad dx=\frac{a}{\left(1-t\right)^{2}}dt\,. \tag{22}$$

Тогда интеграл (25) примет вид:

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{1}af\left(\frac{a}{1-t}\right)\frac{1}{\left(1-t\right)^{2}}dt\,. \tag{23}$$

Такая замена преобразует полупрямую $\left[a,+\infty\right)$ в отрезок [0,1]. Если при этом подынтегральная функция и её производные ограничены, то интеграл вида (27) можно определять, применяя общепринятые методы приближенных вычислений. Проверим этот метод на примере показательного распределения, функция распределения и плотность которого имеют соответственно вид:

$$F(x)=1-e^{-\lambda x},\qquad f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\,. \tag{24}$$

Пусть требуется определить вероятность того, что $P(x>a)$. Рассмотрим два возможных решения этой задачи:

$$P(x>a)=1-(\ 1-e^{-\lambda a}\ )\qquad \text{или}$$

$$P(x>a)=\int_{0}^{1}a\exp\left(-\lambda\frac{a}{1-t}\right)\frac{1}{\left(1-t\right)^{2}}dt\,. \tag{25}$$

Приняв, что $\lambda=0,2$ и $a=0,5$, получим, что эти два метода дают совпадающие результаты: $P(x>0,5)=0,9048$.

Назовём коэффициентом усечения величину, которую определим так:

$$\eta=H\left[a,b\right]/H[0,+\infty)\,. \tag{26}$$

Рассмотрим применение полученных результатов на численном примере. Примем, что для рассматриваемого показательного распределения параметр $\lambda=0,4$.

Результаты вычислений коэффициента усечения для этого случая приведены в табл. 3.

Из результатов вычислений следует, что эта величина возрастает с увеличением интервала усечения. Более подробный численный анализ полученных решений может стать темой дальнейших исследований.

Таблица 3 – **Вычисление дифференциальной энтропии случайной величины, распределённой по показательному закону при различных вариантах усечения интервала её определения**

Вариант усечения	Величина энтропии (нит)	Коэффициент усечения
$H[0,+\infty]$	1,9162	1
$H[1,4]$	1,0407	0,5431
$H[0,1]$	0,0014	$7\cdot 10^{-4}$
$H[1,+\infty]$	1,9160	0,9998

Связь между всеми полученными в данном сообщении результатами можно получить, используя гамма – функцию, необходимые сведения о которой приведены в работах [13,14].

Для каждой гамма – функции, в данном случае, определённой в виде:

$$\Gamma(u)=\int_0^{+\infty} x^{u-1}e^{-x}dx\,; \qquad (27)$$

существует неполная гамма – функция, определённая как:

$$\gamma(u,a)=\int_0^{a} x^{u-1}e^{-x}dx\,; \qquad (28)$$

и дополнительная неполная гамма – функция, определённая как:

$$\Gamma(u,a)=\int_a^{+\infty} x^{u-1}e^{-x}dx\,. \qquad (29)$$

Числитель условия (14) представим в виде:

$$\lambda\int_a^b e^{-\lambda x}\ln\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx=$$
$$=\lambda\ln\lambda\int_a^b e^{-\lambda x}dx-\lambda^2\int_a^b x\,e^{-\lambda x}dx. \qquad (30)$$

Второе слагаемое в условии (30) представим в виде:

$$\lambda\int_a^b \lambda x\,e^{-\lambda x}dx=$$
$$=\lambda\left(\int_0^b \lambda x\,e^{-\lambda x}dx-\int_0^b \lambda x\,e^{-\lambda x}dx\right). \qquad (31)$$

Проводя в условии (31) замену вида $\lambda x=u$ и выполняя необходимые преобразования, получим, что:

$$H[a,b]=\frac{\gamma(2,\lambda b)-\gamma(2,\lambda a)}{e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}}+$$
$$+\ln\left(e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}\right)-\ln\lambda. \qquad (32)$$

Приняв $a=0$ и переобозначив $b=a$, получим из (32):

$$H[0,a]=\frac{\gamma(2,\lambda a)}{1-e^{-\lambda a}}+\ln\left(1-e^{-a\lambda}\right)-\ln\lambda\,. \qquad (33)$$

Используя условие (11), получим, что:

$$H[a,+\infty)=-\frac{1}{1-(1-e^{-\lambda a})}\times$$
$$\times\int_a^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\ln\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx-\ln\left(1-\left(1-e^{-\lambda a}\right)\right). \qquad (34)$$

Преобразуя условие (34), получим:

$$H[a,+\infty)=$$
$$=-\frac{1}{e^{-\lambda a}}\int_a^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\ln\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx-\lambda a. \qquad (35)$$

Интегрируя условие (35), получим, что:

$$H[a,+\infty)=e^{\lambda a}\Gamma(2,\lambda a)-\lambda a-\ln\lambda.\,. \qquad (37)$$

Сравнивая условия (18) и (37), получим, что:

$$H[a,+\infty)=e^{\lambda a}\Gamma(2,\lambda a)-\lambda a-\ln\lambda=\ln\frac{e}{\lambda}. \qquad (38)$$

Справедливость равенства (37) покажем на численном примере. Примем, что $\lambda=0,04$, $a=2$. Используя условие (18), получим, что:

$$H[a,+\infty)=\ln(e/\lambda)=\ln(e/0,04)=4,2188\,.$$

Используя условие (37), получим, что:

$$H[a,+\infty)=e^{\lambda a}\Gamma(2,\lambda a)-\lambda a-\ln\lambda=$$
$$=e^{0,08}\Gamma(2;0,08)-0,08-\ln 0,04=4,2188.$$

Для вычисления значения $\Gamma(2;0,08)$ использован калькулятор, размещённый на сайте: https://keisan.casio.com/exec/system/1180573447

Выводы

1. Поставлена задача об определении дифференциальной энтропии случайной величины, заданной усечённым распределением.

2. Получены решения этой задачи для интервалов усечения следующих видов: $[a,b]$, $[0,a]$, $[a,+\infty)$.

3. Приведено решение поставленной задачи для усечённого показательного распределения.

4. Показано, что для показательного распределения, область определения которого ограничена только слева, величина энтропии, вычисленная справа от точки усечения, не зависит от её расположения на числовой оси и равна энтропии, вычисленной вдоль всей области определения.

5. Приведен способ численного интегрирования интеграла с бесконечным верхним пределом,

позволяющий свести задачу к численному интегрированию в конечных пределах. Проведен численный анализ полученных решений

6. Введено понятие коэффициента усечения, равного отношению энтропии, вычисленной для случайной величины, заданной усечённым распределением к величине энтропии, вычисленной для случайной величины, определённой на всей области возможных значений и вычислены его значения.

7. Для показательного распределения показана связь полученных решений с неполными гамма-функциями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. / Е.С. Вентцель. – Москва: Изд. НАУКА, 1969.- 576 с.
2. Michlowicz J.V. Handbook of DIFFERENTIAL ENTROPY. / J.V. Michlowicz, J.M. Nichols, F. Bucholtz.- NtwYork.: A. CHAPMAN & HALL, 2014. -220 p.
3. Тихов М.С. Эконометрические модели с цензурированными данными / М.С. Тихов, Т.С. Бородина. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 552 с.
4. Анализ надёжности технических систем по цензурированным выборкам / В.М. Скрипкин, А.Е. Назин, Ю.Г. Приходько, Ю.Н. Благовещенский. – Москва: Радио и связь, 1998. – 184 с.
5. Abdushukurov, A.A. (1987), ‘’ Estimation of probability density and intensity function of the Koziol – Green model of random cencoring’’, Sankhya, Ser.A. 1987, v.4, p.150-168.
6. Nelson, W. (1972), “Theory and appiications for hazard plotting for censored failure data”, Technometrics, 1972, v.14, p. 945-965.
7. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – Москва: Большая Российская энциклопедия, 2004. – 910с.
8. Евангелие / Москва: Благовест, 2014. – 464 с.
9. Кавчук С.В. Сборник примеров и задач по теории информации. Руководство для практических занятий на базе Mathcad 6.0 Plus./ С.В. Кавчук - Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002. - 64 с.
10. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями / А.Хальд. – Москва: Иностр. лит., 1956. – 595 с.
11. Шор Я.Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности / Я.Б. Шор- Москва: Сов.радио, 1962. – 527 с.
12. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – Санкт-Петербург: БхВ, 2011. – 592 с.
13. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана - Москва: Наука, 1979.-832 с.
14. Прудников А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев - Москва: Наука, 1981. – 798 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Є. П. Путятін,
Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків
Received (Надійшла) 13.07.2018
Accepted for publication (Прийнята до друку) 26.09.2018

Визначення диференціальної ентропії випадкової величини, яка задана урізаним показниковим розподілом

С. В. Гадецька, В. Ю. Дубницький

Поставлено задачу про визначення диференціальної ентропії випадкової величини, яка задана урізаним показниковим розподілом. Отримано розв’язання цієї задачі для інтервалів урізання наступних видів: $[a, b]$, $[0, a]$, $[a, +\infty]$. Наведено розв’язок поставленої задачі для урізаного показникового розподілу. Доведено, що для показникового розподілу, область визначення якого обмежена тільки зліва, величина ентропії, обчислена праворуч від точки урізання, не залежить від розташування цієї точки на числовій осі і дорівнює ентропії, обчисленої уздовж всієї області визначення. Викладено спосіб чисельного інтегрування інтегралу з нескінченною верхньою границею, що дозволяє звести задачу до чисельного інтегрування в кінцевих границях. Проведено чисельний аналіз отриманих рішень результатів. Введено поняття коефіцієнта урізання, який дорівнює відношенню ентропії, обчисленої для випадкової величини, яка задана урізаним розподілом, до ентропії, обчисленої для випадкової величини, визначеної на всій області її можливих значень, і обчислені його значення. Для показникового розподілу показано зв'язок отриманих розв’язків з неповними гамма-функціями.

Ключові слова: ентропія, урізаний розподіл, показниковий розподіл, гамма-функція, неповна гамма-функція.

Definition of the differential entropy of a random value given by a truncated distribution

S. Gadetska, V. Dubnitskiy

The problem of determining the differential entropy of a random variable given by a truncated distribution is formulated. The solutions of this problem are obtained for truncation intervals of the following types: $[a, b]$, $[0, a]$, $[a, +\infty]$. The solution of the problem for the exponential distribution is given. It is shown that for an exponential distribution whose domain of definition is bounded only on the left, the entropy value calculated to the right of the truncation point does not depend on the location of this point on the numerical axis and is equal to the entropy calculated along the entire domain of definition. A method of numerical integration of an integral with an infinite upper limit is given, which makes it possible to reduce the problem to numerical integration in finite limits. A numerical analysis of the solutions is obtained. The concept of the truncation coefficient which equal to the ratio of the entropy of a random variable of a truncated distribution to the entropy of a random variable determined on the whole range of its possible values is introduced. Its values are calculated for the exponential distribution. The relationship between obtained solutions for the exponential distribution and incomplete gamma function is shown.

Keywords: entropy, truncated distribution, exponential distribution, gamma function, incomplete gamma function.