УДК 519.618 **doi: 10.26906/SUNZ.2018.4.057**

Е. Б. Ахиезер, О. И. Дунаевская, И. В. Сердюк, А. Ю. Стрельникова, Д. В. Гармаш

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков, Украина

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОИНДЕКСНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

В общей постановке транспортная задача состоит в отыскании оптимального плана перевозок некоторого однородного груза потребителям, что приводит к двухиндексной задаче. В реальных транспортных задачах необходимо учитывать не только различия в пунктах производства и потребления, но и промежуточных центров, вида товара, типа транспортных средств и т.д. Такая задача описывается многоиндексной моделью транспортной задачи. Точное решение многоиндексной транспортной задачи может быть получено методом потенциалов. Однако, практическая реализация этого метода является трудоемкой, причем вычислительная сложность получения решения быстро растет с увеличением размерности задачи. Это обстоятельство стимулирует разработку приближенных методов решения многоиндексных транспортных задач, позволяющих более просто осуществлять улучшение текущего плана задачи. В связи с этим в работе предложена итерационная процедура улучшения плана задачи, основанная на элементарных преобразованиях матриц и легко реализующаяся, путем простейшего перебора подматриц. Особенности процедуры иллюстрируются на частном случае трехиндексной транспортной задачи. При этом использован эффективный прием при построении начального опорного плана задачи, состоящего в нуль – преобразовании исходной матрицы стоимостей, который обобщен на случай транспортной задачи произвольной индексности. Использование метода приводит к тому, что начальный опорный план ближе к оптимальному, что существенно сокращает число итераций решения задачи. Предложенные методы полезно использовать как на этапе построения начального опорного плана, так и при итерационном его улучшении. Эффективность предложенных методов решения многоиндексных транспортных задач высокой размерности иллюстрируется на примере.

Ключевые слова: транспортная задача, опорный план, критерий оптимальности, метод нуль-преобразования матрицы, метод потенциалов, итерационная процедура, многоиндексные задачи.

Введение

В общей постановке транспортная задача состоит в отыскании оптимального плана перевозок некоторого однородного груза потребителям, что приводит к двухиндексной задаче.

Трехиндексные задачи возникают и в других случаях, когда количество потребителей и производителей велико и естественное стремление уменьшить транспортные расходы и время доставки товара приводит к необходимости размещения дополнительных (промежуточных) складов.

В реальных транспортных задачах необходимо учитывать не только различия в пунктах производства и потребления, а также промежуточных центров, но и вида товара, типа транспортных средств и т.д. Такая задача описывается многоиндексной моделью транспортной задачи [1, 6].

Постановка задачи

Зададим множество $S=\{1,2,...,s\}$, содержащее первые S чисел натурального ряда. Каждому числу $l \in S$ поставим в соответствие индекс j_l, который может принимать одно из множества $J_l=\{1,2,...,n_l\}$ значений.

Набор индексов $\{j_1, j_2,..., j_S\}$ формирует S-мерный индекс F.

Ясно, что существует $N=\prod_{l=1}^{S} n_l$ различных S-мерных индексов F, образующих множество $E=\{F_1, F_2,..., F_N\}$.

Каждому S-индексному элементу $F=\{j_1, j_2,..., j_S\}$ поставим в соответствие число $X_{j_1 j_2 \cdots j_s}=X_F$, которые в совокупности формируют S-индексную матрицу $\{X_F\}$, содержащую N элементов.

Введем непустое произвольное подмножество

$$f_i=\left\{k_1^i, k_2^i,..., k_{t_i}^i\right\}$$

множества S.

При этом

$$j_{k_1^i} \in \left\{1,2,...,n_{k_1^i}\right\}=J_{k_1^i},$$

$$j_{k_2^i} \in \left\{1,2,...,n_{k_2^i}\right\}=J_{k_2^i},$$

$$\ldots,$$

$$j_{k_{t_i}^i} \in \left\{1,2,...,n_{k_{t_i}^i}\right\}=J_{k_{t_i}^i}.$$

Каждому такому подмножеству соответствует подмножество индексов

$$F_i=\left\{j_{k_1^i}, j_{k_2^i},..., j_{k_{t_i}^i}\right\} \subset F.$$

Совокупность всех компонент S-индексной матрицы $\{X_F\}$ с фиксированными индексами

$$F_i = \left\{k_1^i, k_2^i, ..., k_{t_i}^i\right\}$$

образует $(S - t_i)$ - мерное сечение S-индексной матрицы ориентации $\overline{F_i}$, $\overline{F_i} = F / F_i$.

Введем далее полную сумму чисел $X_{j_1 j_2 \cdots j_s}$ в виде

$$\sum_{j_1 \in J_1} \sum_{j_2 \in J_2} \cdots \sum_{j_S \in J_S} X_{j_1 j_2 \cdots j_S} = \sum_E X_F , \qquad (1)$$

а также частные суммы этих чисел вида

$$\sum_{j_{k_1^i} \in J_{k_1^i}} \sum_{j_{k_2^i} \in J_{k_2^i}} \cdots \sum_{j_{k_{t_i}^i} \in J_{k_{t_i}^i}} X_{j_1 j_2 \cdots j_S} = \sum_{E_i} X_F , \qquad (2)$$

$$E_i = J_{k_1^i} \times J_{k_2^i} \times \ldots \times J_{k_{t_i}^i} . \qquad (3)$$

Далее каждому S-индексному элементу $\{j_1, j_2, ..., j_S\}$ поставим в соответствие число $C_{j_1 j_2 \cdots j_s} = C_F$.

Такие числа в совокупности образуют матрицу $\{C_F\}$.

Сформулируем теперь задачу отыскания набора $\{X_F\}$, минимизирующего

$$L(X) = \sum_E C_F X_F \qquad (4)$$

и удовлетворяющего ограничениям

$$\sum_{E_1} X_F = b_{\overline{F_1}}^{(1)}, \ \overline{F}_1 \in \overline{E_1} = E \setminus E_1 ,$$

$$\sum_{E_2} X_F = b_{\overline{F_i}}^{(2)}, \ \overline{F}_2 \in \overline{E_2} = E \setminus E_2 , \qquad (5)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{E_m} X_F = b_{\overline{F_m}}^{(m)}, \ \overline{F}_m \in \overline{E_m} = E \setminus E_m ,$$

$$X_F \geq 0 , \ F \in E . \qquad (6)$$

Пусть числа элементов в каждом из подмножеств $J_{k_1^i}, J_{k_2^i}, ..., J_{k_{t_i}^i}$ одинаковы и равны, например, n.

Кроме того, пусть подмножества F_i, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, представляют собой всевозможные сочетания из S элементов множества F по d, $m = C_S^d$.

Тогда задача (4) – (6) называется S - индексной d - гиперпланарной транспортной задачей [3].

В частности, если

$$S = 3 , \ d = 1 \ \text{и} \ n_1 = n_2 = n_3 = n ,$$

то задача (4) – (6) упрощается к виду: найти набор $X = \left(X_{j_1 j_2 j_3}\right)$, минимизирующий

$$L(X) = \\ = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \sum_{j_3=1}^{n} C_{j_1 j_2 j_3} X_{j_1 j_2 j_3} \qquad (7)$$

и удовлетворяющий ограничениям:

$$\sum_{j_1=1}^{n} X_{j_1 j_2 j_3} = b_{j_2 j_3}^{(1)}, \ j_k \in J_k , \ k = \{2,3\} ,$$

$$\sum_{j_2=1}^{n} X_{j_1 j_2 j_3} = b_{j_1 j_3}^{(2)}, \ j_k \in J_k , \ k = \{1,3\} , \qquad (8)$$

$$\sum_{j_3=1}^{n} X_{j_1 j_2 j_3} = b_{j_2 j_3}^{(3)}, \ j_k \in J_k , \ k = \{1,2\} ,$$

$$X_{j_1 j_2 j_3} \geq 0 , \ j_1 \in J_1 , \ j_2 \in J_2 , \ j_3 \in J_3 . \qquad (9)$$

При этом получена трехиндексная триаксиальная транспортная задача.

Обращает на себя внимание особенность, характерная для всех многоиндексных задач, - высокая размерность. Параметр $M = N \cdot m$, определяющий сложность задачи, для типичных реальных значений числа переменных - N и числа ограничений - m принимает значения, имеющие порядок $10^8 - 10^{12}$, что делает невозможным шаблонное применение технологий, имеющихся в популярных математических пакетах (MathCad, Exel и т.п.).

Точное решение многоиндексной транспортной задачи может быть получено методом потенциалов [1, 2]. Процесс решения состоит из предварительного этапа, на котором строится начальный опорный план, и конечного числа однотипных операций, составляющих основной этап работы вычислительного алгоритма [5, 7]. Каждая итерация основного этапа состоит из двух шагов. На первом шаге с помощью критерия оптимальности проверяется оптимальность опорного плана, полученного на предыдущей итерации. Если этот признак выполняется, то план оптимален, в противном случае переходят ко второму этапу. На этом этапе формируется новый план, значение целевой функции которого не хуже, чем значение этой функции на предыдущей итерации и этот план проверяется на оптимальность. И в случае его не оптимальности, формируется очередной план.

Однако, практическая реализация этого метода является трудоемкой, причем вычислительная сложность получения решения быстро растет с увеличением размерности задачи. Это обстоятельство стимулирует разработку приближенных методов решения многоиндексных транспортных задач. Эти методы полезно использовать как на этапе построения начального опорного плана, так и при итерационном его улучшении.

Решение задачи

Эффективный прием, используемый при построении начального опорного плана, состоит в нуль – преобразовании исходной матрицы стоимостей, который обобщен на случай транспортной задачи произвольной индексности [4].

При этом

$$C^{(0)}_{j_1 j_2 \dots j_s} =$$
$$= C_{j_1 j_2 \dots j_s} - \left(\alpha^{(1)}_{j_1 j_3 \dots j_s} + \alpha^{(2)}_{j_1 j_3 \dots j_s} + \dots + \alpha^{(s)}_{j_1 j_3 \dots j_s} \right),$$

где $$\alpha^{(1)}_{j_2 j_3 \dots j_s} = \min_{j_1} \left\{ C_{j_1 j_2 \dots j_s} \right\},$$

$$\alpha^{(2)}_{j_1 j_3 \dots j_s} = \min_{j_2} \left\{ C_{j_1 j_2 \dots j_s} - \alpha^{(1)}_{j_2 j_3 \dots j_s} \right\}, \qquad (10)$$

……………………………………

$$\alpha^{(s)}_{j_1 j_2 \dots j_{s-1}} =$$
$$= \min_{j_s} \left\{ C_{j_1 j_2 \dots j_s} - \alpha^{(1)}_{j_2 j_3 \dots j_s} - \dots - \alpha^{(s-1)}_{j_1 j_2 \dots j_{s-2} j_s} \right\}.$$

В частности, для триаксиальной транспортной задачи соотношения (10) упрощаются к виду

$$C^{(0)}_{j_1 j_2 j_3} =$$
$$= C_{j_1 j_2 j_3} - \left(\alpha^{(1)}_{j_2 j_3} + \alpha^{(2)}_{j_1 j_3} + \alpha^{(3)}_{j_1 j_2} \right),$$

где $$\alpha^{(1)}_{j_2 j_3} = \min_{j_1} \left\{ C_{j_1 j_2 j_3} \right\},$$

$$\alpha^{(2)}_{j_1 j_3} = \min_{j_2} \left\{ C_{j_1 j_2 j_3} - \alpha^{(1)}_{j_2 j_3} \right\},$$

$$\alpha^{(s)}_{j_1 j_3} = \min_{j_s} \left\{ C_{j_1 j_2 j_3} - \alpha^{(1)}_{j_2 j_3} - \alpha^{(2)}_{j_1 j_3} \right\}.$$

Это приводит к тому, что начальный опорный план ближе к оптимальному, а следовательно для решения задачи понадобится значительно меньшее число итераций.

Понятно, что применение любого из методов получения начального опорного плана может привести, вообще говоря, к плану достаточно далекому от оптимального. Ввиду очевидной сложности метода потенциалов возникает необходимость в разработке приближенного метода, позволяющего возможно более просто осуществлять улучшение текущего плана задачи.

Рассмотрим существо предлагаемой процедуры применительно к трехиндексной транспортной задаче. Из трехиндексной матрицы $\left\{ x_{j_1 j_2 j_3} \right\}$ выделим произвольную подматрицу размера $2 \times 2 \times 2$ с компонентами

$$x_{j_1 j_2 j_3}, \; j_1 \in \left\{ j_1^{(0)}, j_1^{(1)} \right\} = J_1^{(э)},$$

$$j_2 \in \left\{ j_2^{(0)}, j_2^{(1)} \right\} = J_2^{(э)},$$

$$j_3 \in \left\{ j_3^{(0)}, j_3^{(1)} \right\} = J_3^{(э)}.$$

Обозначим эту подматрицу через

$$X_0 = X^{j_1^{(0)} j_2^{(0)} j_3^{(0)}}_{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}}.$$

С этой подматрицей свяжем две следующие подматрицы

$$\tilde{X} = \tilde{X}^{j_1^{(0)} j_2^{(0)} j_3^{(0)}}_{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}} \text{ и } \tilde{\tilde{X}} = \tilde{\tilde{X}}^{j_1^{(0)} j_2^{(0)} j_3^{(0)}}_{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}},$$

компоненты которых зададим соотношениями

$$\tilde{x}_{j_1 j_2 j_3} =$$
$$= \begin{cases} x_{j_1 j_2 j_3} - \tilde{\theta}, \; \left(j_1 j_2 j_3 \right) \in \\ \in E_0 \left\{ \begin{matrix} \left(j_1^{(0)} j_2^{(0)} j_3^{(0)} \right), \left(j_1^{(0)}, j_2^{(1)}, j_3^{(1)} \right), \\ \left(j_1^{(1)}, j_2^{(1)} j_3^{(0)} \right), \left(j_1^{(1)} j_2^{(0)} j_3^{1} \right) \end{matrix} \right\}, \\ x_{j_1 j_2 j_3} + \tilde{\theta}, \; \left(j_1 j_2 j_3 \right) \in \\ \in E_1 \left\{ \begin{matrix} \left(j_1^{(0)} j_2^{(1)} j_3^{(0)} \right), \left(j_1^{(1)}, j_2^{(0)}, j_3^{(0)} \right), \\ \left(j_1^{(0)}, j_2^{(0)} j_3^{(1)} \right), \left(j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{1} \right) \end{matrix} \right\}, \end{cases} \qquad (11)$$

где $$\tilde{\theta} = \min_{\left(j_1 j_2 j_3 \right) \in E_0} \left\{ x_{j_1 j_2 j_3} \right\}, \qquad (12)$$

$$\tilde{\tilde{x}}_{j_1 j_2 j_3} =$$
$$= \begin{cases} x_{j_1 j_2 j_3} + \tilde{\tilde{\theta}}, \; \left(j_1 j_2 j_3 \right) \in E_0, \\ x_{j_1 j_2 j_3} - \tilde{\tilde{\theta}}, \; \left(j_1 j_2 j_3 \right) \in E_1, \end{cases} \qquad (13)$$

где $$\tilde{\tilde{\theta}} = \min_{\left(j_1 j_2 j_3 \right) \in E_1} \left\{ x_{j_1 j_2 j_3} \right\}. \qquad (14)$$

При этом:

если $\tilde{\theta} = 0$, то

$$X^{j_1^{(0)} j_2^{(0)} j_3^{(0)}}_{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}} = \tilde{X}^{j_1^{(0)} j_2^{(0)} j_3^{(0)}}_{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}};$$

если $\tilde{\theta} = \tilde{\tilde{\theta}} = 0$, то

$$X^{j_1^{(0)} j_2^{(0)} j_3^{(0)}}_{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}} = \tilde{X}^{j_1^{(0)} j_2^{(0)} j_3^{(0)}}_{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}} = \tilde{\tilde{X}}^{j_1^{(0)} j_2^{(0)} j_3^{(0)}}_{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}}.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{j_1 \in J_1^{(+)}} x_{j_1 j_2 j_3} = \sum_{j_1 \in J_1^{(+)}} \tilde{x}_{j_1 j_2 j_3} = \sum_{j_1 \in J_1^{(+)}} \tilde{\tilde{x}}_{j_1 j_2 j_3},$$

$$j_2 \in J_2^{(Э)},\ j_3 \in J_3^{(Э)},$$

$$\sum_{j_2 \in J_2^{(+)}} x_{j_1 j_2 j_3} = \sum_{j_2 \in J_2^{(+)}} \tilde{x}_{j_1 j_2 j_3} = \sum_{j_2 \in J_2^{(+)}} \tilde{\tilde{x}}_{j_1 j_2 j_3},$$

$$j_1 \in J_1^{(Э)},\ j_3 \in J_3^{(Э)},$$

$$\sum_{j_3 \in J_3^{(+)}} x_{j_1 j_2 j_3} = \sum_{j_3 \in J_3^{(+)}} \tilde{x}_{j_1 j_2 j_3} = \sum_{j_3 \in J_3^{(+)}} \tilde{\tilde{x}}_{j_1 j_2 j_3},$$

$$j_1 \in J_1^{(Э)},\ j_2 \in J_2^{(Э)}.$$

Отсюда следует, что в плане

$$X = \left\{ x_{j_1 j_2 j_3} \right\}$$

можно элементарную матрицу $X_{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}}^{j_1^{(0)} j_2^{(0)} j_3^{(0)}}$ заменить на $\tilde{X}_{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}}^{j_1^{(0)} j_2^{(0)} j_3^{(0)}}$ или на $\tilde{\tilde{X}}_{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}}^{j_1^{(0)} j_2^{(0)} j_3^{(0)}}$, не нарушая при этом ограничений задачи.

Рассчитаем соответствующие стоимости транспортировок

$$C = \sum_{j_1 \in J_1^{(э)}} \sum_{j_2 \in J_2^{(э)}} \sum_{j_3 \in J_3^{(э)}} C_{j_1 j_2 j_3} x_{j_1 j_2 j_3},$$

$$\tilde{\tilde{C}} = \sum_{j_1 \in J_1^{(э)}} \sum_{j_2 \in J_2^{(э)}} \sum_{j_3 \in J_3^{(э)}} C_{j_1 j_2 j_3} \tilde{\tilde{x}}_{j_1 j_2 j_3}.$$

Сравним теперь значения C, $\tilde{C}$ и $\tilde{\tilde{C}}$ по величине и выберем из них минимальное. Если минимальным оказалось число $\tilde{C}$, то подматрицу X_0 заменим на $\tilde{X}$, уменьшив при этом значение целевой функции задачи.

Если наименьшим оказалось число $\tilde{\tilde{C}}$, то подматрица X_0 заменяется на $\tilde{\tilde{X}}$. Если, наконец, наименьшим является C, то формируется новая подматрица X_0 и вся процедура повторяется.

Эффективность метода нуль-преобразования и приближенного метода улучшения начального опорного плана задачи была произведена экспериментально при решении двухиндексных и трехиндексных транспортных задач.

Условия задач формировались с помощью имитационной модели.

Каждая задача решалась дважды:

а) начальный план формируется традиционным методом северо-западного угла;

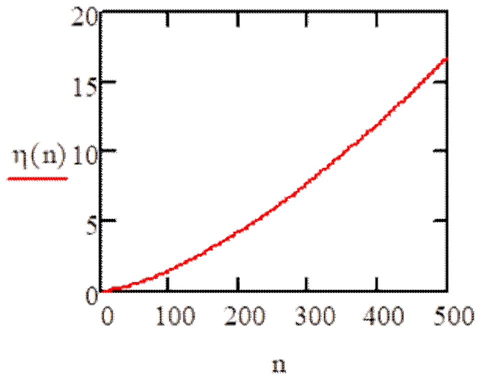
б) начальный план формируется методом нуль-преобразования.

Критерий оценки эффективности имеет вид:

$$\eta_k(N) = \frac{V_k^{(T)}(N)}{V_k^{(0)}(N)},\ k = 2,3.$$

Здесь $V_k^{(T)}(N)$ - количество итераций улучшения начального плана, полученного традиционным методом до получения решения, $V_k^{(0)}(N)$ - количество итераций улучшения начального плана, полученного методом нуль – преобразования до получения решения, N - размерность задачи.

$$\eta_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3} N^{1.5}$$



$$\eta_3 = 4{,}8 \cdot 10^{-4} N^{1.9}$$

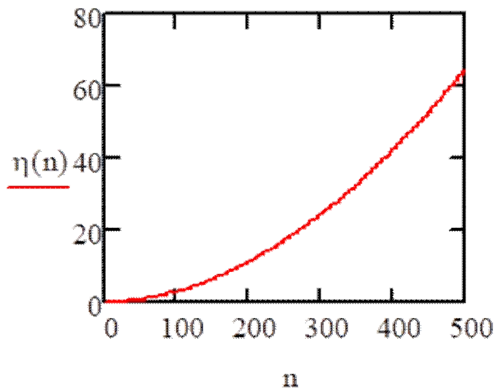


Рис. 1. График зависимости оценки эффективности метода нуль - преобразования от размерности задачи

Выводы

Таким образом, для решения многоиндексных транспортных задач предложена итерационная процедура улучшения плана задачи, основанная на элементарных преобразованиях матриц и легко реализующуюся, путем простейшего перебора подматриц X_0.

Особенности процедуры иллюстрируются на частном случае трехиндексной транспортной задаче. При этом использован эффективный прием при построении начального опорного плана задачи, состоящего в нуль – преобразовании исходной матрицы, который приводит к тому, что начальный опорный план ближе к оптимальному, что существенно сокращает число итераций решения задачи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Раскин Л. Г. Многоиндексные задачи линейного программирования / Л. Г. Раскин, И. О. Кириченко – М., 1982. – 240 с.
2. Лукинский В. С. Модели и методы теории логистики / В. С. Лукинский, И. А. Цвиринько, Ю. В. Малевич – СПб.: ПИТЕР, 2003 – 175 с.
3. Серая О. В. Многоиндексные модели логистики в условиях неопределенности / О. В. Серая. – Харьков : ФОП Стеценко, 2010. – 512 с.
4. Дунаевская О. И. Нечеткая модель нелинейной многоиндексной транспортной задачи/ Л. Г. Раскин, О. В. Серая, О. И. Дунаевская // Восточно-европейский журнал передовых технологий. - 2012. - № 6/4. (60). - С. 15-17.
5. Дунаевская О. И. Получение начального опорного плана многоиндексной задачи транспортной логистики. / Е. Б. Ахиезер, О. А. Геляровская, Н. Т. Процай // Радиоэлектроника и информатика. – 2014. – № 2. – С. 16-18.
6. Дунаевская О. И. Сущность математических методов и моделей для решения экономических задач / Е. Б. Ахиезер, О. И. Дунаевская // Международные конференции: Дослідження та оптимізація економічних процесів «Оптимум» : Харьков, 2014 – С. 128 – 134.
7. Дунаевская О. И. Расчет матицы стоимостей оптимальных маршрутов для совокупности пар (поставщик потребитель) // Materials of the X International scientific and practical conference «Trends of modern science», May 30 - June 7, 2014. – Sheffield. - Science and education LTD – 2014. – С. 17-20.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Ю. Ю. Коляденко,
Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків
Received (Надійшла) 29.05.2018
Accepted for publication (Прийнята до друку) 25.07.2018

Методи розв'язку багатоіндексних транспортних задач високої розмірності

О. Б. Ахієзер, О. І. Дунаєвська, І. В. Сердюк, А. Ю. Стрельнікова, Д. В. Гармаш

У загальній постановці транспортна задача полягає у знаходженні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу споживачам, що призводить до двохіндексної задачі. У реальних транспортних задачах необхідно враховувати не тільки відмінності в пунктах виробництва і споживання, а й проміжних центрів, виду товару, типу транспортних засобів і т.б. Таке завдання описується багатоіндексною моделлю транспортної задачі. Точне рішення багатоіндексної транспортної задачі може бути отримано методом потенціалів. Однак, практична реалізація цього методу є трудомісткою, причому обчислювальна складність отримання рішення швидко зростає зі збільшенням розмірності задачі. Ця обставина стимулює розробку наближених методів вирішення багатоіндексних транспортних завдань, що дозволяють більш просто здійснювати поліпшення поточного плану завдання. У зв'язку з цим в роботі запропонована ітераційна процедура поліпшення плану завдання, заснована на елементарних перетвореннях матриць і легко реалізується, шляхом простого перебору підматриць. Особливості процедури ілюструються на окремому випадку трьохіндексної транспортної задачі. При цьому використаний ефективний прийом при побудові початкового опорного плану задачі, що складається в нуль - перетворенні вихідної матриці вартостей, який узагальнено на випадок транспортної задачі довільної індексних. Використання методу призводить до того, що початковий опорний план ближче до оптимального, що істотно скорочує число ітерацій рішення задачі. Запропоновані методи корисно використовувати як на етапі побудови початкового опорного плану, так і при ітераційне його поліпшення. Ефективність запропонованих методів вирішення багатоіндексних транспортних завдань високої розмірності ілюструється на прикладі.

Ключові слова: транспортне завдання, опорний план, критерій оптимальності, метод перетворення матриці, метод потенціалів, ітераційна процедура, багатоіндексне завдання.

Methods for solving multi-index transport tasks of high dimensionality

O. Akhiezer , O. Dunaevskaya, I. Serdyuk, A. Strelnikova, D. Harmash

In the general formulation, the transportation problem consists in finding an optimal plan for the transportation of some homogeneous cargo to consumers, which leads to a two-index problem. In real transportation problems, it is necessary to take into account not only differences in points of production and consumption, but also of intermediate centers, type of goods, type of vehicles, etc. Such a problem is described by a multi-index model of the transportation problem. The exact solution of a multi-index transportation problem can be obtained by the method of potentials. However, the practical implementation of this method is laborious, and the computational complexity of obtaining a solution grows rapidly with the increase in the dimension of the problem. This circumstance stimulates the development of approximate methods for solving multi-index transportation problems, which make it easier to carry out the improvement of the problem current plan. In this regard, the paper proposes an iterative procedure for improving the problem's plan, based on elementary matrix transformations and easily realized, by a simple search of submatrices. The features of the procedure are illustrated by the special case of the three-index transportation problem. In this case, an effective technique was used to construct the initial basic plan of the problem consisting in the zero transformation of the initial value matrix, which is generalized in the case of a transportation problem of arbitrary index. Using the method leads to the fact that the initial basic plan is closer to the optimal one, that substantially reduces the number of iterations of the solution of the problem. The proposed methods are useful to be used both at the stage of construction of the initial basic plan, and during its iterative improvement. The effectiveness of the proposed methods for solving multi-index transportation problems of high dimension is illustrated by an example.

Keywords: transportation problem, basic plan, optimality criterion, zero matrix transformation method, method of potentials, iteration procedure, multi-index problems.