УДК 517.912 **doi: 10.26906/SUNZ.2018.3.078**

Ю. В. Приставка

Полтавський національний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава, Україна

# ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОГО (1+2)-ВИМІРНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

**Предметом** вивчення в статті є застосування лiївського методу до побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження точних розв'язків (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. **Мета -** здійснити побудову точних розв'язків (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії на основі використання симетричних властивостей цього рівняння. **Задача** − використати лiївську симетрію рівняння (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків. Для реалізації цієї задачі використано метод Софуса Лі, в основі його лежить принцип симетрії. Згідно з методом С. Лі диференціальні рівняння з частинними похідними, які володіють класичною ліiвською симетрією, можна редукувати до звичайних диференціальних рівнянь за допомогою спеціальних підстановок(анзаців). Розв'язавши редуковані рівняння, можна побудувати точні розв'язки вихідного диференціального рівняння з частинними похідними. **Висновки:** використано симетрійні властивості (1+2)-вимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків.

**Ключові слова:** (1+2)-вимірне рівняння реакції-конвекції-дифузії, симетрія, метод Лі, максимальна алгебра інваріантності, інваріантний анзац, редукована система, точні розв'язки.

## Вступ

У сучасних наукових дослідженнях вивчення багатьох фізичних, біохімічних, екологічних процесів проводиться на основі аналізу відповідних математичних моделей. Значну кількість фундаментальних законів природи можна описати за допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними та їх систем.

До таких рівнянь відносять (1+2)-вимірне рівняння реакції-конвекції-дифузії.

$$\Delta u = f^0(u)u_0 + f^a(u)u_a + h(u), \tag{1}$$

де $u = u(x_0, x_1, x_2)$, $x_0$ − часова змінна, $x_1, x_2$ − просторові змінні, $f^0(u)$, $f^a(\mathrm{u})$, $h(u)$ − коефіцієнти дифузії, конвекції та реакції відповідно, індекс біля функції внизу означає диференціювання за відповідною змінною, за індексами, які повторюються, розуміється сумування, $a \in \{1,2\}$.

Рівняння (1) використовується для опису різних фізичних процесів, зокрема процесів теплопровідності, дифузії та конвекції. Воно застосовується для моделювання руху частинок, енергії або інших фізичних величин у певній фізичній системі. При конкретних значеннях нелінійностей рівняння (1) використовується при описі переносу кисню в кровоносній системі, для моделювання росту тромбу в пристінковому потоці.

Одним із застосувань даного рівняння також є дослідження процесів розповсюдження речовини, яка забруднює водойми. Гідродинамічна нестійкість, яка виникає поблизу поверхні розподілу двох рідин, що не змішуються, і описується рівнянням (1), зустрічається в таких галузях, як нафтопереробка, процеси горіння, сепарація руд і т. п.

## Основна частина

Розглянемо рівняння

$$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + u^k \lambda_a u_a + \frac{\vec{\lambda}^2}{4(k+1)} u^{k+1}, \tag{2}$$

де $\lambda_a$, $k$ − довільні сталі.

Серед рівнянь (1) з ненульовим конвективним доданком це рівняння володіє найширшим класом симетрії.

Поставимо задачу використати симетрійні властивості рівняння (2) для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків.

***Теорема 1.*** Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (2) є така алгебра

$$< \partial_0,\ \partial_1,\ \partial_2,\ D = kx_0\partial_0 + u\partial_u,\ Q_1,\ Q_2 >, \tag{3}$$

де $Q_1 = e^w[(\lambda_a cos\omega + \lambda_a^\perp sin\omega)\partial_a - \frac{\vec{\lambda}^2}{2(k+1)} cos\omega u\partial_u],$

$$Q_2 = e^w[(-\lambda_a^\perp cos\omega + \lambda_a sin\omega)\partial_a - \frac{\vec{\lambda}^2}{2(k+1)} sin\omega u\partial_u],$$

$$w = -\frac{k}{4(k+1)}\vec{\lambda}\vec{x},\ \omega = -\frac{k}{4(k+1)}\vec{\lambda}^\perp \vec{x},\ \vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2),$$

$\vec{\lambda}^\perp = (-\lambda_2, \lambda_1)$ − вектор, перпендикулярний до вектора $\vec{\lambda}$.

Теорема 1 доводиться стандартним методом Лі (див. [2, 3]).

Використавши заміну

$$\frac{16(k+1)^2}{k^2\vec{\lambda}^2} x_0 \to x_0,\ \ \frac{k}{4(k+1)}\vec{\lambda}\vec{x} \to x_1, \quad -\frac{k}{4(k+1)}\vec{\lambda}^\perp \vec{x} \to x_2,\ u \to u, \tag{4}$$

перейдемо до рівняння

$$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + u^k u_1 + \frac{1}{4(k+1)} u^{k+1} . \quad (5)$$

Перші чотири оператори алгебри (3) в нових змінних матимуть той же вигляд, зміняться лише $Q_1$ та $Q_2$. Вони набудуть вигляду

$$Q_1 = e^{-x_1}(cosx_2\partial_1 - sinx_2\partial_1 - \frac{2}{k}cosx_2 u\partial_u),$$

$$Q_2 = e^{-x_1}(sinx_2\partial_1 + cosx_2\partial_1 - \frac{2}{k}sinx_2 u\partial_u) .$$

Проведемо редукцію рівняння (5) до рівняння з меншою кількістю змінних, використовуючи найзагальніший вигляд оператора інваріантності

$$X = d_0\partial_0 + d_a\partial_a + c_0 D + c_1 Q_1 + c_2 Q_2 . \quad (6)$$

Один з анзаців (наприклад, [5]), отриманий за допомогою оператора (6) має вигляд

$$u = e^{-\frac{2}{k}x_1}\varphi(x_0,\omega), \omega = \dot{z}(x_2)e^{x_1} + me^{2x_1}, \quad (7)$$

де $z = z(x_2)$ – довільний розв'язок рівняння $\ddot{z} + z = 0$. Даний анзац редукує рівняння (5) до диференціального рівняння

$$\varphi_0 = (4m\omega + \vec{c}^2)\partial_\omega(\varphi^k \varphi_\omega) + 4m\varphi^k \varphi_\omega .$$

Припустивши, що $m = 0$, прийдемо до рівняння

$$\varphi_0 = \vec{c}^2\partial_\omega(\varphi^k \varphi_\omega) .$$

Використавши заміну

$$x_0 \to \frac{1}{\vec{c}^2}x_0, \omega \to \omega, \varphi \to \varphi \quad (8)$$

одержимо рівняння

$$\varphi_0 = \partial_\omega(\varphi^k \varphi_\omega) . \quad (9)$$

***Теорема 2*** [3]. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (9) є алгебра

$$1) < \partial_0, \partial_\omega, D = 2x_0\partial_0 + \omega\partial_\omega, D_0 = kx_0\partial_0 - \varphi\partial_\varphi >,$$

якщо $k \neq -4/3$.

$$\begin{aligned} 2) < \partial_0, \partial_\omega, D_0 = 4x_0\partial_0 + 3\varphi\partial_\varphi, D_1 = \\ = 2\omega\partial_\omega - 3\varphi\partial_\varphi, K = \omega^2\partial_\omega - 3\omega\varphi\partial_\varphi >, \end{aligned} \quad (10)$$

якщо $k = -4/3$.

Використаємо ліївську симетрію рівняння (9) для побудови його інваріантних анзаців, редукції та знаходження розв'язків (див., [6]).

Наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, які одержуються у випадку $k \neq -4/3$:

$$\varphi = \psi(y),\ y = \omega + px_0 ; \quad (11)$$

$$\varphi = x_0^{-1/k}\psi(y),\ y = \omega + p\ln x_0 ; \quad (12)$$

$$\varphi = e^{-\frac{2p}{k}x_0}\psi(y),\ y = e^{px_0}\omega ; \quad (13)$$

$$\phi = x_0^{-\frac{1+2p}{k}}\psi(y),\ y = x_0^p\omega, . \quad (14)$$

де $p$ – довільна стала $(p \neq 0)$, яка виражається через сталі $c_0, c_1, d_0, d_1$.

Для знаходження невідомих функцій $\psi$ необхідно одержані вище анзаци підставити у рівняння (9). У результаті отримаємо відповідно такі редуковані рівняння:

$$\partial_y(\psi^k \psi_y) - p\psi_y = 0 , \quad (15)$$

$$\partial_y(\psi^k \psi_y) - p\psi_y - \frac{1}{k}\psi = 0 ,$$

$$\partial_y(\psi^k \psi_y) - py\psi_y + \frac{2p}{k}\psi = 0 ,$$

$$\partial_y(\psi^k \psi_y) - py\psi_y + \frac{2p+1}{k}\psi = 0 .$$

Частинними розв'язками редукованого рівняння (15) ( [3, 4]) є

$$\psi = (pky + c)^{\frac{1}{k}},\ k \neq 0 ; \quad (16)$$

$$\psi = -th^2\left[\frac{p}{2}y + c\right],\ k = -\frac{1}{2} ; \quad (17)$$

$$\psi = tg^2\left[\frac{p}{2}y + c\right],\ k = -\frac{1}{2} ; \quad (18)$$

$$arcth\psi^{\frac{1}{4}} + arctg\ \psi^{\frac{1}{4}} = -\frac{p}{2}y + c,\ k = -\frac{3}{4}, \quad (19)$$

де $c$ – довільна стала.

Використавши анзац (11) та розв'язки (16)-(19), знаходимо розв'язки рівняння (2):

$$u = e^{-\frac{1}{2(k+1)}\vec{\lambda}\vec{x}}\left[pk(\dot{z}(\frac{k}{4(k+1)}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})e^{\vec{\lambda}\vec{x}\cdot k/(4(k+1))} + \right.$$

$$\left. + \frac{16p\vec{c}^2(k+1)^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0) + c\right]^{1/k},\ k \neq 0;$$

$$u = -e^{-\vec{\lambda}\vec{x}}\left(x_0 \cdot 16\vec{c}^2/\vec{\lambda}^2\right)^2 \times$$

$$\times th^2\left[\frac{p}{2}(\dot{z}(\frac{1}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})e^{-\frac{1}{4}\vec{\lambda}\vec{x}} + \frac{16p\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0) + c\right],\ k = -\frac{1}{2};$$

$$u = e^{-\vec{\lambda}\vec{x} - 4p\vec{c}^2x_0} \times$$

$$\times tg^2\left[\frac{p}{2}(\dot{z}(\frac{1}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})\exp\left(-\frac{1}{4}\vec{\lambda}\vec{x} + \frac{16p\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0\right) + c\right], k = -\frac{1}{2};$$

$$arcth\left[\left(\frac{16\vec{c}^2}{9\vec{\lambda}^2}x_0\right)^{-4(1+2p)/3} e^{-2\vec{\lambda}\vec{x}}u\right]^{1/4} +$$

$$+arctg\left[\left(\frac{16\vec{c}^2}{9\vec{\lambda}^2}x_0\right)^{-4(1+2p)/3} e^{-2\vec{\lambda}\vec{x}}u\right]^{1/4} =$$

$$= -\frac{p}{2}\left[\left(\frac{16\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0\right)^p\left(\dot{z}\left(\frac{3}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)e^{-\frac{3}{4}\vec{\lambda}\vec{x}}\right)\right]+c,\ k=-\frac{3}{4}.$$

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (9) при $k=-\frac{4}{3}$ є алгебра (10). Не вдаючись у деталі інтегрування, наведемо вигляд інваріантних анзаців, які одержуються в результаті

$$\varphi = (\omega^2+r)^{-3/2}\psi(y),\quad r\in\{-1,0,1\},$$

$$y=\begin{cases} arcth\omega + px_0, r=-1,\\ \dfrac{1}{\omega}+px_0, r=0,\\ -arcth\omega + px_0, r=1; \end{cases} \quad (20)$$

$$\varphi = x_0^{3/4}(\omega^2+r)^{-3/2}\psi(y),\quad r\in\{-1,0,1\},$$

$$y=\begin{cases} arcth\omega + p\ln x_0, r=-1,\\ \dfrac{1}{\omega}+p\ln x_0, r=0,\\ -arcth\omega + p\ln x_0, r=1, \end{cases} \quad (21)$$

де $p$ − довільна стала $(p\neq 0)$, яка виражається через сталі $c_0, c_1, d_0, d_1$.

Для знаходження невідомих функцій $\psi$ необхідно одержані вище анзаци підставити у рівняння (9). У результаті отримаємо відповідно такі редуковані рівняння:

$$\partial_y(\psi^{-\frac{4}{3}}\psi_y) = p\psi_y + 3r\psi^{-\frac{1}{3}}, \quad (22)$$

$$\partial_y(\psi^{-\frac{4}{3}}\psi_y) = p\psi_y + (\frac{3}{4}\psi^{\frac{4}{3}}+3r)\psi^{-\frac{1}{3}}. \quad (23)$$

Загальний розв'язок рівняння (22) при $r=0$ є

$$-3c_1^{-1}\psi^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\psi^{-\frac{2}{3}} - c_1\psi^{-\frac{1}{3}} + c_1^2}{(\psi^{-1/3}+c_1)^2} -$$
$$-\sqrt{3}arctg\frac{2}{c_1\sqrt{3}}(\psi^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}c_1) = c_1^{-4}p(y+c_2) \quad (24)$$

при $c_1\neq 0$, та

$$\psi = (-\frac{4}{3}py+c)^{-3/4} \quad (25)$$

при $c_1 = 0$.

Один із розв’язків рівняння (22) при $r=-1$ має вигляд

$$\psi = 4^{3/4}. \quad (26)$$

Використавши формули (4), (7), (8), (20), (21) знаходимо розв'язки рівняння (2):

$$-3c_1^{-1}\Phi + \frac{1}{2}\ln\frac{\Phi^2 - c_1\Phi + c_1^2}{(\Phi+c_1)^2} - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2}{c_1\sqrt{3}}\times$$
$$\times(\Phi - \frac{1}{2}c_1) = c_1^{-4}p(\dot{z}(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})e^{-\vec{\lambda}\vec{x}} + \frac{p\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2} + c_2),$$

$$\Phi = \dot{z}^{-1}(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})e^{-\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}u^{-\frac{1}{3}}, c_1\neq 0,$$

$$u = e^{-\frac{3}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}\dot{z}^{-3}(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})\times$$
$$\times\left[-\frac{4}{3}p(e^{-\vec{\lambda}\vec{x}}\dot{z}^{-1}(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}) + \frac{p\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0) + c\right]^{-3/4};$$

$$u = (4\frac{\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0)^{\frac{3}{4}}e^{\frac{3}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}(\dot{z}(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})e^{-\vec{\lambda}\vec{x}} - 1)^{-\frac{3}{2}}.$$

Проведемо лінеаризацію рівняння (9) при умові $k=-2$. Застосуємо до даного рівняння сукупність двох перетворень(див., наприклад, [6], [8]):

$$x_0 = x_0,\ \omega=\omega,\ \varphi = v_\omega^{-1}$$

де $v=v(x_0,\omega)$ − нова невідома функція,

$$x_0 = t,\ \omega = w,\ v = x,$$

де $t, x$ − нові незалежні змінні, $w=w(t,x)$ − нова залежна змінна.

У результаті одержимо рівняння

$$w_t = w_{xx}.. \quad (27)$$

Це лінійне рівняння теплопровідності. Його симетрійні властивості добре відомо.

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (27) є нескінченно вимірна алгебра, підалгеброю якої є узагальнена алгебра Галілея

$$<\partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + xQ, Q = -\frac{1}{2}w\partial_w, D = 2t\partial_t + x\partial_x,$$
$$\Pi = t^2\partial_t - tx\partial_x + (\frac{x^2}{2}+t)Q>.$$

Використаємо лiївську симетрію рівняння (27) для побудови його інваріантних анзаців. Для цієї мети використаємо лінійну комбінацію операторів узагальненої алгебри Галілея

$$k_0\partial_t + k_1\partial_x + k_2G + k_3Q + k_4D + k_5\Pi.$$

Застосувавши метод знаходження інваріантних анзаців(див., наприклад [7, 8]), одержимо такі нееквівалентні випадки

$$w = e^{pt}\psi(y),\ y = x + nt\,; \qquad (28)$$

$$w = t^{p}\psi(y),\ y = \frac{x}{\sqrt{t}}\,; \qquad (29)$$

$$w = e^{xt+\frac{2}{3}t^3}\psi(y),\ y = x + t^2\,; \qquad (30)$$

$$w = e^{-\frac{1}{4}\frac{x^2 t}{t^2+1}p\arctan t}\times$$
$$\times (t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\psi(y),\ y = \frac{x}{t^2+1}. \qquad (31)$$

Підставивши анзаци (27)-(30) у рівняння (26), одержимо такі редуковані рівняння:

$$\ddot{\psi} - n\dot{\psi} - p\psi = 0\,; \qquad (32)$$

$$\ddot{\psi} + \frac{1}{2}y\dot{\psi} - p\psi = 0\,;$$

$$\ddot{\psi} - y\psi = 0\,;$$

$$\ddot{\psi} - (\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2})\psi = 0. \qquad (33)$$

Розв'язками редукованого рівняння (32) в залежності від значень сталих $n$ і $p$ є

$$\psi = c_1 e^{k_1 y} + c_2 e^{k_2 y}\,; \qquad (34)$$

$$\psi = (c_1 + c_2 y)e^{k_3 y}\,; \qquad (35)$$

$$\psi = (c_1\cos\beta y + c_2\sin\beta y)e^{\alpha y}. \qquad (36)$$

Використавши анзац (28) та розв'язки (34)-(36), знаходимо розв'язки рівняння (2), записані у параметричному вигляді:

$$\vec{\lambda}\vec{x} = 2\times$$
$$\times\ln\frac{c_3 e^{k_1(\tau+\frac{4n\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0)} + c_4 e^{k_2(\tau+\frac{4n\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0)}}{\dot{z}\left(\frac{1}{2}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)} + 8p\frac{\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0;$$

$$u = \frac{1}{\dot{z}\left(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}/2\right)}\times$$
$$\times\frac{c_3 e^{k_1(\tau+\frac{4n\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0)} + c_4 e^{k_2(\tau+\frac{4n\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0)}}{c_3 k_1 e^{k_1(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)} + c_4 k_2 e^{k_2(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)}};$$

$$\vec{\lambda}\vec{x} = 2\ln\frac{\tau + \frac{4n\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0}{\dot{z}\left(\frac{1}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)} + 8\frac{\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}(p + k_3 n)x_0 + 2k_3\tau\,;$$

$$u = \frac{1}{\dot{z}\left(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}/2\right)}\frac{\tau + \left(4n\vec{c}^2/\vec{\lambda}^2\right)\cdot x_0}{1 + k_3(\tau + n\cdot\left(4n\vec{c}^2/\vec{\lambda}^2\right)\cdot x_0)};$$

$$\vec{\lambda}\vec{x} = 2\times$$
$$\times\ln\frac{c_3\cos\beta(\tau + \frac{4n\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0) + c_4\sin\beta(\tau + \frac{4n\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0)}{\dot{z}\left(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}/2\right)} +$$
$$+8p\cdot\left(\vec{c}^2/\vec{\lambda}^2\right)\cdot(p + \alpha n)x_0 + 2\alpha\tau,$$

$$u = \frac{1}{\dot{z}\left(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}/2\right)}\cdot\frac{c_3\cos + c_4\sin A}{(c_3\alpha + c_4\beta)\cos A + (c_4\alpha - c_3\beta)\sin A},$$

де $A = \beta\cdot\left(\tau + 4n\vec{c}^2\cdot x_0/\vec{\lambda}^2\right)$, $\tau$ – довільний параметр.

Розв'язком редукованого рівняння (33) ([1]) є

$$\psi = e^{\frac{1}{4}y^2}(c_1 + c_2 e^{-\frac{1}{2}y^2}dy)\,. \qquad (37)$$

Використавши анзац (31) та розв'язок (37), знаходимо розв'язок рівняння (2), записаний у параметричному вигляді:

$$\vec{\lambda}\vec{x} = 2\ln\left(\begin{array}{c}\dot{z}^{-1}\sigma^{-1/4}W\times\\ \times\exp\left(\tau^2\frac{1-4\vec{c}^2 x_0/\vec{\lambda}^2}{4\sigma} - \frac{1}{2}arctg\frac{4\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0\right)\end{array}\right),$$

$$u = \left(\begin{array}{c}\dot{z}^{-1}\sigma^{-1/4}W\times\\ \times\exp\left(\tau^2\frac{1-4\vec{c}^2/\vec{\lambda}^2\cdot x_0}{4\delta} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{4\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0\right)\end{array}\right)^{-1}\times$$
$$\times e^{\tau^2\frac{1-4\vec{c}^2\cdot x_0/\vec{\lambda}^2}{4\sigma} - \frac{1}{2}arctg\frac{4\vec{c}^2}{\vec{\lambda}^2}x_0}\sigma^{-\frac{3}{4}}\times$$
$$\times\left(-\tau\frac{1-4\vec{c}^2\cdot x_0/\vec{\lambda}^2}{2\sigma}W + c_4\exp\left(-\tau^2/(2\sigma)\right)\right),$$

де $\sigma = \sigma(x_0) = x_0^2\cdot 4\vec{c}^4/\vec{\lambda}^2 + 1$, $z = z\left(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}/2\right)$,

$$W = c_3 + c_4\int_0^{\tau/\sqrt{\sigma}} e^{-v^2/2}\,\mathrm{dv}\,,\ \tau \text{ – довільний параметр.}$$

## Висновки

Таким чином, ми використали симетрійні властивості рівняння (2) для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків. Знайдені нами точні розв'язки рівняння (2) містять довільні сталі

$m,\ c,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4, k_1,\ k_2,\ k_3,\ p,\ n,\ \alpha,\ \beta$.

Отже, можна стверджувати, що ми побудували декілька багатопараметричних класів точних розв'язків даного рівняння. Це дає можливість застосувати одержані розв'язки для розв'язування різноманітних граничних та початкових задач.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 704 с.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности. Доклады АН СССР / Л.В. Овсянников. – Т.125, 1959. – С. 492-495.
4. Олвер П. приложения груп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. – М.: Мир, 1989. – 581с.
5. Фущич В.И. О нелокальних анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности / В.И. Фущич, Н.И. Сєров, Т.К. Амеров. – К.: Наук. думка, 1989. − 339 с.
6. Фущич В.И. Симметричний анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики / В.И. Фущич, В.М. Штелень, Н.И. Серов. – К.: Наук. думка, 1989. – 339 с.
7. Akhatov I.S. Nonlocal symmetries. Heuristicapproach. / I.S. Akhatov, R.K. Gazizov, N.H. Ibragimov // J. Sov. Math. – 55 (1991). – P. 1401-1450.
8. King J.R. Some non-local transformations between nonlinear diffusion equation / J.R. King // Journal of Mathematical Phisics. – 1990. – V. 23 – P. 5441-5464.

REFERENCES

1. Kamke, E. (1965), *Handbook of ordinary differential equations*, Nauka, Moscow, 704 p.
2. Ovsyannikov, L.V. (1978), *Group analysis of differential equations*, Nauka, Moscow, 400 p.
3. Ovsyannikov, L.V. (1959), "Group properties of the equations of nonlinear heat conductivity", *Reports of the USSR AS*, Vol. 125, pp. 492-495.
4. Olver, P. (1989), *Applications of Lie groups to differential equations*, Mir, Moscow, 581 p.
5. Fushchych, V.I., Seryov, N.I. and Amer, T.K. (1989), On nonlocal ansatzes for one nonlinear one-dimensional heat equation, Naukova dumka, Kyiv, 339 p.
6. Fushchych, V.I., Shtelyon, V.M. and Serov, N.I. (1989), *Symmetric analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics*, Naukova dumka, Kyiv, 339 p.
7. Akhatov, I.S., Gazizov, R.K. and Ibragimov, N.H. (1991), "Nonlocal symmetries. Heuristicapproach", *J. Sov. Math*, 55, pp. 1401-1450.
8. King, J.R. (1990), "Some non-local transformations between nonlinear diffusion equation", *Journal of Mathematical Phisics*, Vol. 23, pp. 5441-5464.

**Рецензент**: д-р техн. наук, проф. С. В. Козелков,
Державний університет телекомунікацій, Київ
Received (Надійшла) 28.02.2018
Accepted for publication (Прийнята до друку) 15.05.2018

**Точные решения нелинейного (1+2)-измерного уравнения реакции-конвекции-диффузии**

Ю. В. Приставка

**Предметом** изучения в статье является применение лиивського метода к построению инвариантных анзацов, редукции и нахождения точных решений (1+2)-измерного уравнения реакции-конвекции-диффузии. **Цель** - осуществить построение точных решений (1+2)-измерного уравнения реакции-конвекции-диффузии на основе использования симметрийного свойств этого уравнения. **Задача** - использовать лиивську симметрию (1+2)-измерного уравнения реакции-конвекции-диффузии для построения инвариантных анзацив, редукции и нахождения его точных решений. Для реализации этой задачи использован метод Софуса Ли, в основе которого лежит принцип симметрии. Согласно методу С. Ли дифференциальные уравнения в частных производных, которые обладают классической лиивской симметрией, можно редуцировать к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью специальных подстановок(анзацов). Решив редуцированные уравнения, можно построить точные решения исходного дифференциального уравнения в частных производных. **Выводы:** использовано симметрийные свойства (1+2)-измерного уравнения реакции-конвекции-диффузии для построения инвариантных анзацов, редукции и нахождения его точных решений.

**Ключевые слова:** (1+2)-измерное уравнения реакции-конвекции-диффузии, симметрия, метод Ли, максимальная алгебра инвариантности, инвариантный анзац, редуцирована система, точные решения.

**Exact solutions of (1+2)-dimensional nonlinear equation of reaction-convection-diffusion**

Yu. Prystavka

**The subject** of study in the article is the application of the Lie's method to the construction of invariant anzatze, the reduction and the finding of exact solutions (1+2)-dimensional equation of reaction-convection-diffusion. **The goal** is to construct exact solutions (1+2)-dimensional equation of reaction-convection-diffusion based on the use of symmetric properties of this equation. **The problrem** is to use the Lie's symmetry of (1+2)-dimensional equation of the reaction-convection-diffusion for constructing invariant anzatze, reduction and finding its exact solutions. For the realization of this problem the method of Sophus Lie is used, which based on the principle of symmetry. According to the method of S. Lie, differential equations with partial derivatives possessing classical Lie's symmetry can be reduced to ordinary differential equations with the help of special substitutions (anzatze). We can construct exact solutions of the initial differential equation with partial derivatives, having solved the reduced equations. **Conclusions:** symmetric properties of (1+2)-dimensional reaction-convection-diffusion for the construction of invariant anzatze, the reduction and the finding of its exact solutions.

**Keywords:** (1+2)-dimensional equation of reaction-convection-diffusion, symmetry, the method of Lie, maximal invariance algebra, invariant anzatz, reduced system, exact solutions.