УДК 62.5 doi: 10.26906/SUNZ.2018.3.061

С. В. Гадецкая[1], В. Ю. Дубницкий[2], А. М. Кобылин[2]

[1] Национальный Технический Университет "ХПИ", Харьков, Украина
[2] Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ «Университет банковского дела», Харьков, Украина

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЭЛАСТИЧНОСТЬ ЭНТРОПИИ ШЕННОНА, ТСАЛЛИСА И РЕНЬИ

Рассмотрены функционалы, определяющие энтропии Шеннона, Тсаллиса, Реньи.Показано, что энтропии Тсаллиса и Реньи, определённые для непрерывных случайных величин, при стремлении параметра экстенсивности к единице сходятся к энтропии Шенннона.Введено понятие относительной параметрической чувствительности, определяемое эластичностью энтропии по отношению к параметрам закона распределения. Получены выражения параметрической эластичности энтропии Шеннона для нормального распределения, распределения Лапласа, распределения Коши, логистического распределения, логлогистического распределения, распределение Рэлея, экспоненциального распределения, логнормального распределения, распределения Парето, распределения Вейбулла, гамма-распределения. Получены в общем виде выражения для определения эластичности по параметру экстенсивности для энтропий Тсаллиса и Реньи.Получены в общем виде для энтропий Тсаллиса и Реньи условия для определения эластичности по одному из параметров плотности распределения .

Ключевые слова: энтропия непрерывной случайной величины, энтропия Шеннона, энтропия Тсаллиса, энтропия Реньи, эластичность функции, эластичность энтропии, энтропия нормального распределения, энтропия распределения Лапласа, энтропия распределения Коши, энтропия логистического распределения, энтропия логлогистического распределения, энтропия распределение Рэлея, энтропия экспоненциального распределения, энтропия логнормального распределения, энтропия распределения Парето, энтропия распределения Вейбулла, энтропия гамма-распределения.

Введение

В работах [1, 2] было показано, что решение многих задач материаловедения, связанных с синтезом материалов с заданными свойствами, требует управления параметрами законов распределения технологических процессов получения этих свойств. Для выбора величины управляющих воздействий в этих работах рекомендовано использовать понятие эластичности функции. Формальный смысл понятия эластичности функции следующий. Эластичностью функции $f(x)$ называют предел отношения относительного изменения функции к относительному изменению аргумента. Физический смысл понятия эластичности функции следующий.

Эластичностью функции $f(x)$ показывает, на сколько процентов изменится значение функции при изменении значения аргумента на один процент, поэтому эластичность называют безразмерной чувствительностью функции по отношению к переменной или параметру. В последнем случае говорят о параметрической чувствительности.

Строгое определение этой величины дано в работе [5], свойства её описаны в работах [3, 4]. Пусть $y = f(x)$, тогда эластичность этой функции по аргументу x определяют по условию:

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}. \qquad (1)$$

Если $y = f(x,\lambda)$, где λ некоторый параметр, то эластичность заданной функции по параметру определяют по условию:

$$E_\lambda(y) = \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x,\lambda) \cdot \frac{\lambda}{f(x,\lambda)}. \qquad (2)$$

В работе [1] этот приём был использован при определении параметрической эластичности функции плотности распределения непрерывных случайных величин. В работе [2] этот приём был использован при определении параметрической эластичности функции интенсивности отказов, определяемой функцией распределения или функцией плотности распределения для непрерывных случайных величин.

Пусть непрерывная случайная величина X задана своей функцией распределения $F(x)$ и плотностью распределения $f(x)$. Функционал вида:

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x) dx \ \ \textit{(нит)} \qquad (3)$$

называют дифференциальной энтропией Шеннона. Далее в тексте - «энтропия Шеннона».

Сведения об этом функционале для конкретных законов распределения случайных величин приведены в работе [6]. Развитие статистической физики потребовало расширение понятия энтропии. В 1988 г. в работе [7] был предложен функционал вида:

$$T(x) = k \cdot \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^q \, \mathrm{dx}\right) \Big/ (q-1). \qquad (4)$$

Условие (4) в дальнейшем получило название энтропии Тсаллиса, в других русскоязычных источниках – Цаллиса. В этом выражении величину q называют параметром экстенсивности. В зависимости от физического смысла задачи, величина $q<1$ или $q>1$.

В 1970 г. в работе [8] был предложен функционал вида:

$$R(x)=k\cdot\ln\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(x\right)\right]^{q}\,\mathrm{dx}\right)\Big/\left(1-q\right). \tag{5}$$

Условие (5) в дальнейшем получило название энтропии Реньи. Следует отметить, что общепринятые наименования единиц измерения для энтропии Тсаллиса и Реньи отсутствуют.

В условиях (4) и (5) принято, что k – постоянная величина, обеспечивающая необходимую физическую размерность результата. В нашем случае, без ограничения общности, принимаем величину $k=1$. Особенности применения этих видов энтропии для решения физических задач описаны в работе [9]. Особенности применения энтропии Тсаллиса при анализе динамики фондовых рынков описаны в работах [10,11]. В работе [12] показано, что для дискретной случайной величины X энтропии Тсаллиса и Реньи совпадают с энтропией Шеннона.

Анализ литературы. Применение понятия эластичности функции для исследования чувствительности энтропии в доступной авторам данного сообщения литературе не обнаружено.

Постановка задачи. Определение параметрической чувствительности энтропии Шеннона, Тсаллиса и Реньи для основных видов плотностей распределения случайных величин.

Полученные результаты

Рассмотрим, используя правило Лопиталя, поведение энтропии Тсаллиса при $q\to 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1}T(x)&=\lim_{q\to 1}\left(1-\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^{q}\,\mathrm{dx}\right)\Big/\left(q-1\right)=\\&=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{q\to 1}-\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^{q}\ln f(x)\,\mathrm{dx}\Big/1.\end{aligned} \tag{6}$$

Следовательно:

$$\lim_{q\to 1}T(x)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\ln f(x)\,\mathrm{dx}\,. \tag{7}$$

Рассмотрим, используя правило Лопиталя, поведение энтропии Реньи при $q\to 1$, имея ввиду, что $f(x)$ - функция плотности вероятности:

$$\begin{aligned}&\lim_{q\to 1}R(x)=\lim_{q\to 1}\ln\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(x\right)\right]^{q}\,\mathrm{dx}\right)\Big/\left(1-q\right)=\\&=\lim_{q\to 1}\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(x\right)\right]^{q}\ln(f(x)\,\mathrm{dx}}{-1}=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\ln f(x)\,\mathrm{dx}.\end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, показано, что в пределе энтропии Реньи и Тсаллиса совпадают с энтропией Шеннона.

Рассмотрим далее параметрическую эластичность энтропии Шеннона. В табл. 1 даны сведения, приведенные в работе [6], об энтропии Шеннона для использованных в данном сообщении законов распределения непрерывных случайных величин, с возможными значениями на всей числовой оси.

Таблица 1. **Энтропия Шеннона распределений с возможными значениями на всей числовой оси**

Вид распределения	**Плотность распределения**	**Энтропия**
Нормальное распределение	$f(x)=\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{-1}\times$ $\times exp\left(-\left(x-\mu\right)^{2}\Big/\left(2\sigma^{2}\right)\right)$	$H=\frac{1}{2}ln\left(2\pi e\sigma^{2}\right)$
РаспределениеЛапласа	$f(x)=\frac{1}{2}\lambda\,exp(-\lambda\lvert x\rvert)$	$H=ln\left(\frac{2e}{\lambda}\right)$
РаспределениеКоши	$f(x)=\dfrac{1}{\pi b\left[1+\dfrac{\left(x-a\right)^{2}}{b^{2}}\right]}$	$H=ln(4\pi b)$
Логистическое распределение	$f(x)=\dfrac{1}{4ch^{2}\left(\dfrac{x-\mu}{2s}\right)}$	$H=ln(se^{2})$

В табл. 2 даны сведения, приведенные в работе [6], об энтропии Шеннона для использованных в данном сообщении законов распределения непрерывных случайных величин, с возможными значениями на положительной полуоси.

Таблица 2. **Энтропия Шеннона распределений с возможными значениями на положительной полуоси**

Вид распределения	**Плотность распределения**	**Энтропия *(нит)***
Логлогистическое распределение	$f(x)=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}\Big/\left[1+\left(x/\alpha\right)^{\beta}\right]^{2}$	$H(x)=ln\left(\frac{\alpha}{\beta}e^{2}\right)$
Распределение Рэлея	$f(x)=\frac{x}{\sigma^{2}}exp\left(-x^{2}/\left(2\sigma^{2}\right)\right)$	$H(x)=ln\left[\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}exp\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\right)\right]$ $H(x)=ln(2{,}5652\sigma)$
Экспоненциальное распределение	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$h(x)=ln\left(e/\lambda\right)$
Логнормальное распределение	$f(x)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left\{-\left[ln\,x-\left(ln\,m\right)^{2}\right]/\left(2\sigma^{2}\right)\right\}$	$H(x)=\frac{1}{2}ln\left(2\pi e\sigma^{2}m^{2}\right)$
Распределение Парето	$f(x)=cx_{0}^{c}x^{-(c+1)}$	$H(x)=ln\left[\frac{x_{0}}{c}exp\left(1+\frac{1}{c}\right)\right]$

Окончание табл. 2

Распределение Вейбулла	$f(x)=\frac{\eta}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta-1}exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta}\right]$	$H(x)=ln\left\{\frac{\sigma}{\eta}exp\left[1+\left(\frac{\eta-1}{\eta}\right)\right]\gamma\right\}$
Гамма-распределение	$f(x)=\frac{\lambda^{\eta}}{\Gamma(\eta)}x^{\eta-1}e^{-\lambda x}$	$H(x)=ln\,\Gamma(\eta)+\eta+$ $+(1-\eta)\Psi(\eta)-ln\,\lambda$

Здесь и далее использованы общепринятые обозначения для специальных функций, свойства которых описаны в работе [13]. Гамма-функция:

$$\Gamma(\eta)=\int_0^{\infty}x^{\eta-1}e^{-x}dx\,; \tag{9}$$

производная гамма-функции:

$$\Gamma'(\eta)=\int_0^{\infty}x^{\eta-1}\ln xe^{-x}dx\,; \tag{10}$$

логарифмическая производная гамма-функции (дигамма-функция):

$$\Psi(\eta)=\frac{d}{d\eta}\ln\Gamma(\eta)=\frac{\Gamma'(\eta)}{\Gamma(\eta)}; \tag{11}$$

первая производная дигамма - функции (три-гамма функция):

$$\Psi'(\eta)=\frac{d}{d\eta}\Psi(\eta)=\frac{d^2}{d\eta^2}\ln\Gamma(\eta); \tag{12}$$

γ- постоянная Эйлера, $\gamma\approx0.5772$.

Предположим, что непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x)=f(x,\varphi,\phi)$, где φ,ϕ – известные параметры распределения. Энтропия Шеннона для этой плотности распределения примет вид функции $H(x)=h(\varphi,\phi)$. Тогда эластичностью энтропии шеннона по параметру φ будет условие:

$$E_{\varphi}(H)=\frac{\partial}{\partial\varphi}h(\varphi,\phi)\cdot\frac{\varphi}{h(\varphi,\phi)}. \tag{13}$$

Результаты выполнения этой операции приведены в табл. 3.

Получение эластичности энтропии Шеннона по параметру λ для гамма-распределения очевидно. Более подробно рассмотрим получение эластичности энтропии Шеннона по параметру η для гамма-распределения В работе [4] показано, что:

$$E_x\left(\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\right)=\left(x\Big/\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx}u_i(x). \tag{14}$$

Примем, что:

$$u_1(\eta)=\ln\Gamma(\eta),\ u_2(\eta)=\eta,\ u_3(\eta)=\left((1-\eta)\Psi(\eta)\right).$$

Далее получим, используя условия (11), (12), что:

$$\frac{du_1(\eta)}{d\eta}=\Psi(\eta);\qquad\frac{du_2}{d\eta}=1;$$

Таблица 3. **Параметрическая эластичность энтропии Шеннона**

Вид распределения	Параметрическая эластичность энтропии
Нормальное распределение	$E_{\sigma}(H)=\frac{2}{ln(2\pi e\sigma^2)}=\frac{2}{2{,}8379+2ln\sigma}$
Распределение Лапласа	$E_{\lambda}(H)=-\left[ln\left(\frac{2e}{\lambda}\right)\right]^{-1}=-\left[ln\left(\frac{5{,}4372}{\lambda}\right)\right]^{-1}$
Распределение Коши	$E_b(H)=\left[ln(4\pi b)\right]^{-1}=\left(2{,}5310+ln\,b\right)^{-1}$
Логистическое распределение	$E_s(H)=(ln\,s+2)^{-1}$
Логлогистическое распределение	$E_{\alpha}(H)=\left[ln(\alpha/\beta)+2\right]^{-1}$ $E_{\beta}(H)=\left[-ln(\alpha/\beta)+2\right]^{-1}$
Распределение Рэлея	$E_{\sigma}(H)=\left[ln2{,}5625\sigma\right]^{-1}$
Экспоненциальное распределение	$E_{\lambda}(H)=-\left[ln\left(\left(\frac{1}{\lambda}\right)+1\right)\right]^{-1}$
Логнормальное распределение	$E_{\sigma}(H)=2\Big/ln\left(17{,}0795m^2\sigma^2\right)$ $E_m(H)=2\Big/ln\left(17{,}0795m^2\sigma^2\right)$
Распределение Парето	$E_{x0}(H)=\frac{c}{c\,ln(x_0/c)+c+1}$ $E_c(H)=-\frac{c+1}{c\,ln(x_0/c)+c+1}$
Распределение Вейбулла	$E_{\sigma}(H)=\frac{\eta}{\eta\,ln(\sigma/\eta)+\gamma(\eta-1)+\eta}$ $E_{\eta}(H)=\frac{\gamma-\eta}{\eta\,ln(\sigma/\eta)+\gamma(\eta-1)+\eta}$
Гамма-распределение	$E_{\lambda}(H)=$ $=-\left[ln\,\Gamma(\eta)+\eta+(1-\eta)\Psi(\eta)-ln\,\lambda\right]^{-1}$ $E_{\eta}(H)=\frac{\eta\cdot(1+(1-\eta)\Psi'(\eta))}{ln\,\Gamma(\eta)+\eta+(1-\eta)\Psi(\eta)-ln\,\lambda}$

$$\frac{du_3(\eta)}{d\eta}=-\Psi(\eta)+(1-\eta)\Psi'(\eta). \tag{15}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}\eta}=\Psi(\eta)+1-\Psi(\eta)+(1-\eta)\Psi'(\eta)==1+(1-\eta)\Psi'(\eta). \tag{16}$$

Следовательно, эластичность энтропии Шеннона для гамма-распределения по параметру η примет вид:

$$E_\eta(H)=\frac{\eta\cdot\left(1+\left(1-\eta\right)\Psi'(\eta)\right)}{\ln\Gamma\left(\eta\right)+\eta+\left(1-\eta\right)\Psi\left(\eta\right)-\ln\lambda}. \quad (17)$$

На рис. 1 показано изменение величины энтропии Шеннона (H) и её эластичности $E_\sigma(H)$ для нормального закона распределения в зависимости от изменения величины среднеквадратического отклонения σ.

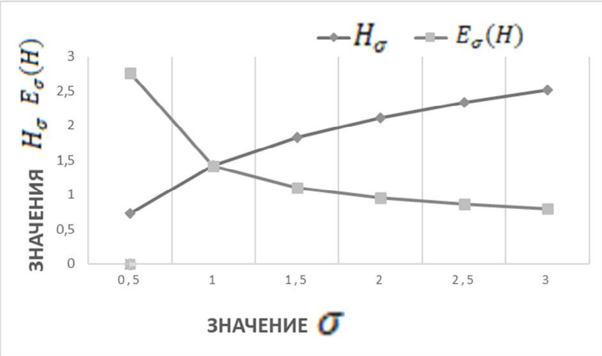

Рис. 1. Изменение величины энтропии Шеннона (H) и её эластичности $E_\sigma(H)$ для нормального закона распределения в зависимости от изменения величины среднеквадратического отклонения σ

На рис. 2 показано изменение эластичности распределения Вейбулла по параметру σ, величины $E_\sigma(H)$, в зависимости от изменения величин параметров распределения σ и η. На рис. 3 показано изменение эластичности $E_\eta(H)$ для закона распределения Вейбулла в зависимости от изменения параметров распределения σ и η.

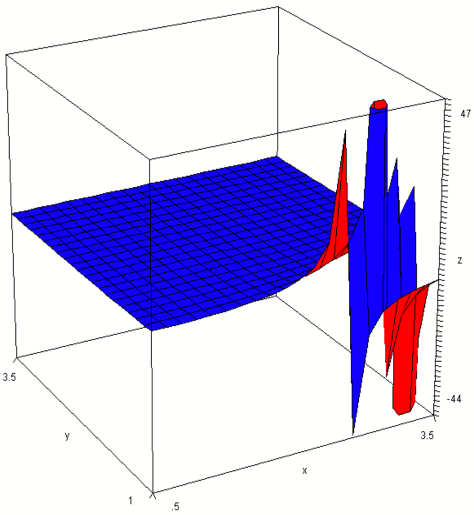

Рис. 2. Изменение величины эластичности $E_\sigma(H)$ для закона распределения Вейбулла, показанное на оси z в зависимости от изменения параметра σ (ось x), и параметра η (ось y)

Рассмотрим параметрическую эластичность энтропий Тсаллиса и Реньи по параметру эластичности q. Известно [14], что интегрирование интеграла вида:

$$I=\int_a^b f\left(x,\alpha\right)\mathrm{dx}$$

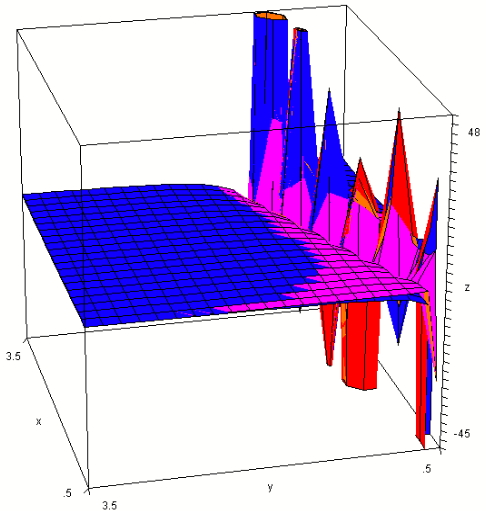

Рис. 3. Изменение величины эластичности $E_\eta(H)$ закона распределения Вейбулла, показанное на оси z в зависимости от изменения параметра σ, показанное на оси x, и параметра η, показанное на оси y

выполняют по правилу:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f\left(x,\alpha\right)dx=\int_a^b\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx. \quad (18)$$

Представим энтропию Тсаллиса, записанную в виде (4), как отношения функций:

$$u(q)=1-\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^q\,\mathrm{dx} \quad (19)$$

и
$$v(q)=q-1, \quad (20)$$

В работе [4] показано, что если:

$$Z(x)=u(x)/v(x); \quad (21)$$

то
$$E_x(Z)=E_x(u)-E_x(v). \quad (22)$$

Для энтропии Тсаллиса примем, что:

$$u=1-\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^q\,\mathrm{dx}; \quad (22)$$

$$v=q-1. \quad (23)$$

Выполняя необходимые действия, указанные в условии (2), получим, что:

$$E_q(u)=\frac{\partial u}{\partial q}\cdot\frac{q}{u}=-\int_{-\infty}^{\infty}q\left[f(x)\right]^{q-1}\mathrm{dx}\times$$
$$\times\, q\Big/\left(1-\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^q\,\mathrm{dx}\right); \quad (24)$$

$$E_q(v)=q/\left(q-1\right). \quad (25)$$

Следовательно:

$$E_q\left(T\right)=E_q(u)-E_q(v)=-q/\left(q-1\right)-$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}q\left[f(x)\right]^{q-1}\mathrm{dx}\cdot\, q\Big/\left(1-\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^q\,\mathrm{dx}\right). \quad (26)$$

Окончательно получим, что эластичность энтропии Тсаллиса по параметру экстенсивности q равна:

$$E_q\left(T\right)=-\left\{\frac{q^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^{q-1}\,\mathrm{dx}}{1-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^{q}\,\mathrm{dx}}+\frac{q}{q-1}\right\}. \qquad (27)$$

Представим энтропию Реньи, записанную в виде (5), как отношения функций:

$$u(q)=\ln\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^{q}\,\mathrm{dx}\right) \qquad (28)$$

и

$$v(q)=1-q\,. \qquad (29)$$

Тогда:

$$E_q\left(R\right)=\frac{\partial u}{\partial q}\cdot\frac{q}{u}=$$

$$=\frac{q\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^{q-1}dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^{q}dx}\cdot\frac{q}{u}=\frac{q^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^{q-1}dx}{\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^{q}dx\right\}^2}; \qquad (30)$$

$$E_q(v)=-\frac{q}{1-q}. \qquad (31)$$

Отсюда следует, что эластичность энтропия Реньи по параметру экстенсивности q равна:

$$E_q(R)=E_q\left(u\right)-E_q(v)=$$

$$=\frac{q^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^{q-1}dx}{\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)\right]^{q}dx\right\}^2}+\frac{q}{1-q}. \qquad (32)$$

Предположим, без ограничения общности, что задана функция плотности вероятности вида $f(x;\lambda,\mu)$. Рассмотрим параметрическую эластичность энтропий Тсаллиса по параметру λ.
Используя условия (2) и (4) получим, что:

$$E_\lambda(T)=\frac{1}{q-1}\times$$

$$\times\frac{\left(-q\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f(x;\lambda,\mu)\right]^{q-1}\frac{\partial}{\partial\lambda}f(x;\lambda,\mu)dx\right)\lambda\left(q-1\right)}{1-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f(x;\lambda,\mu)\right]^{q}dx}. \qquad (33)$$

Окончательно получим, что эластичность энтропии Тсаллиса по параметру функции плотности распределения λ:

$$E_\lambda(T)=$$

$$=\frac{\left(-q\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f(x;\lambda,\mu)\right]^{q-1}\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x;\lambda,\mu)dx\right)}{1-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f(x;\lambda,\mu)\right]^{q}dx}. \qquad (34)$$

Рассмотрим параметрическую эластичность энтропий Реньи по параметру λ. Используя условия (2) и (5) получим следующее.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}R=$$

$$=\frac{q\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[(f(x;\lambda,\mu)^{q-1}\frac{\partial}{\partial\lambda}f(x;\lambda,\mu)\right]dx}{(1-q)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(x;\lambda,\mu\right)\right]^{q}dx\right)}. \qquad (35)$$

Эластичность энтропий Реньи по параметру λ примет вид:

$$E_\lambda(R)=\frac{\partial R}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{R}=$$

$$=\frac{q\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[(f(x;\lambda,\mu)^{q-1}\frac{\partial}{\partial\lambda}f(x;\lambda,\mu)\right]dx}{\ln\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(x;\lambda,\mu\right)\right]^{q}dx\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(x;\lambda,\mu\right)\right]^{q}dx}. \qquad (37)$$

Для конкретных законов распределения условия (34) и (36) могут быть получены численными методами.

Выводы

1. Рассмотрены функционалы, определяющие энтропии Шеннона, Тсаллиса, Реньи.
2. Показано, что энтропии Тсаллиса и Реньи, определённые для непрерывных случайных величин, при стремлении параметра экстенсивности к единице сходятся к энтропии Шеннона.
3. Введено понятие относительной параметрической чувствительности, определяемое эластичностью энтропии по отношению к параметрам закона распределения.
4. Получены выражения параметрической эластичности энтропии Шеннона для нормального распределения, распределения Лапласа, распределения Коши, логистического распределения, логлогистического распределения, распределение Рэлея, экспоненциального распределения, логнормального распределения, распределения Парето, распределения Вейбулла, гамма-распределения.
5. Получены в общем виде выражения для определения эластичности по параметру экстенсивности для энтропий Тсаллиса и Реньи.
6. Получены в общем виде для энтропий Тсаллиса и Реньи условия для определения эластичности по одному из параметров плотности распределения

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубницкий В. Ю. Управление функцией распределения случайной величины [Текст] / В. Ю. Дубницкий, А. И. Ходырев // Системи обробки інформації. –Х.: ХУПС, 2011. – Вип. 5(95). – С. 147-151.
2. Дубницкий В. Ю. Управление интенсивностью отказов положительно определённых случайных величин / В. Ю. Дубницкий, О. Е. Петренко // Системи обробки інформації. Харків: ХУПС, 2017. – Вип. 3(149).- С. 33-37.
3. Справочник по теории автоматического управления [Текст] / под ред. А. А. Красовского. – Москва: Наука, 1987. – 712 с.
4. Солодовников А. С. Математика в экономике: в 2-х частях [Текст] / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов, И. Г. Шандура. Ч.2. – Москва: Финансы и статистика, 2000. – 376 с.
5. Рывкин А. А. Эластичность [Текст] / А. А. Рывкин // Экономико-математический энциклопедический словарь. Гл. редактор В. И. Данилов-Данильяни. – Москва: Изд. Большая Российская энциклопедия, 2003. – С. 649.
7. Michlowicz J. V. Handbook of DIFFERENTIAL ENTROPY / J. V. Michlowicz, J. M. Nichols, F. Bucholtz. – New York: A.CHAPMAN & HALL, 2014. – 220 p.
8. Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. Vol.52. N1/2. P.479-487; a regular updated bibliography is accessible at http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm.
9. Renyi A. Probability Theory. / A. Renyi- Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1970. – 573 p.
10. Зарипов Р. Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. / Р. Г. Зарипов. – Казань: Изд-во «Фэн», 2002. – 251 с.
11. Королёв О. Л. Применение энтропии при моделировании процессов принятия решений в экономике / О. Л. Королёв, М. Ю. Куссый, А. В. Сигал / Под ред. А. В. Сигала. - Симферополь: Издательство «ОДЖАКЪ», 2013. – 148 с.
12. Дербенцев В. Д. Синергетичні та еконофізичні методи дослідження структурних характеристик економічних систем. / В. Д. Дербенцев, О. А. Сердюк, В. М. Соловйов, О. Д. Шарапов. Черкаси: Брама-Україна, 2010. – 287 с.
13. Чумак О. В. Энтропии и фракталы в анализе данных / О. В. Чумак. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований,2011. – 164 с.
14. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
15. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2 / Г. М. Фихтенгольц. – Москва: ФИЗМАТГИЗ, 1962. – 807 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О. О. Можаєв,
Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", Харків
Received (Надійшла) 14.02.2018
Accepted for publication (Прийнята до друку) 21.04.2018

Параметрична еластичність ентропії Шеннона, Тсалліса та Реньї

С. В. Гадецька, В. Ю. Дубницький, А. М. Кобилін

Розглянуто функціонали, що визначають ентропії Шеннона, Тсалліса, Реньї. Показано, що ентропії Тсалліса і Реньї визначені для неперервних випадкових величин, при наближенні параметра екстенсивності до одиниці збігаються до ентропії Шеннона. Введено поняття відносної параметричної чутливості, визначене еластичністю ентропії по відношенню до параметрів закону розподілу. Отримано вирази параметричної еластичності ентропії Шеннона для нормального розподілу, розподілу Лапласа, розподіли Коші, логістичного розподілу, логлогістического розподілу, розподілу Релея, експоненціального розподілу, логнормального розподілу, розподілу Парето, розподілу Вейбулла, гамма-розподілу.Отримано в загальному вигляді вирази для визначення еластичності по параметру екстенсивності для ентропій Тсалліса і Реньї. Отримано у загальному вигляді для ентропій Тсалліса і Реньї умови для визначення еластичності по одному з параметрів щільності розподілу .

Ключові слова: ентропія неперервної випадкової величини, ентропія Шеннона, ентропія Тсалліса, ентропія Реньї, еластичність функції, еластичність ентропії, ентропія нормального розподілу, ентропія розподілу Лапласа, ентропія розподілу Коші, ентропія логістичного розподілу, ентропія логлогистического розподілу, ентропія розподілу Релея, ентропія експоненціального розподілу, ентропія логнормального розподілу, ентропія розподілу Парето, ентропія розподілу Вейбулла, ентропія гамма-розподілу.

Parametric elasticity of entropy of Shannon, Tsallis and Renyi

S. Gadetska, V. Dubnitskiy, A.Kobulin

The functionals defining the entropies of Shannon, Tsallis, Renyi are considered. It is shown that the entropies of Tsallis and Renyi, defined for continuous random variables, approach the Shannon entropy as the parameter of extensiveness approaches unity. The concept of relative parametric sensitivity, defined by the elasticity of entropy with respect to the parameters of the distribution law, is introduced. The expressions for the parametric elasticity of the Shannon entropy for the normal distribution, Laplace distribution, Cauchy distribution, logistic distribution, loglogistic distribution, Rayleigh distribution, exponential distribution, lognormal distribution, Pareto distribution, Weibull distribution, gamma distribution are obtained. The general expressions for determining the elasticity with respect to the extensivity parameter for the entropies of Tsallis and Renyi are obtained. The general conditions for determining the elasticity for the entropies of Tsallis and Renyi with respect to one of the parameters of the distribution density are obtained.

Keywords: entropy of a continuous random variable, Shannon entropy, Tsallis entropy, Renyi entropy, elasticity of function, elasticity of entropy, normal distribution entropy, entropy of the Laplace distribution, entropy of the Cauchy distribution, entropy of the logistic distribution, entropy of the loglogistic distribution, entropy of the Rayleigh distribution, entropy of the exponential distribution, entropy of the lognormal distribution, entropy of the Pareto distribution, entropy of the Weibull distribution, entropy of the gamma distribution