**УДК 510.52**

*Брюхань Л.І., бакалавр*

*Левчук В.М., асистент*

*Полтавський національний технічний університет*

*імені Юрія Кондратюка*

**Застосування твірних функцій до розв’язання рекурентних рівнянь**

**Актуальність теми.** Комбінаторика — це наука, основним завданням якої є перерахунок і перелічення елементів у скінченних множинах. Якщо в задачі визначається, скільки елементів, які належать заданій скінченній множині, мають певну властивість або заданий набір властивостей, то цю задачу називають задачею перерахунку. В інших випадках для будь-яких цілей потрібно вилучити всі елементи множини, які задовольняють заданій властивості. Такі задачі називають задачами перелічення.

Трапляються також задачі, коли на початковій скінченній множині елементів означено деяку цільову функцію, причому інтерес становлять елементи множин, що забезпечують, мінімальне (або максимальне) значення цієї функції. У цьому разі маємо окремий випадок задачі оптимізації. Тут під її розв’яком у сильному значенні розуміють, знаходження сукупності всіх елементів, які забезпечують, мінімальне (або максимальне) значення цільової функції, а під розв’язком у слабкому значенні — відшукання довільного елемента, що забезпечує мінімальне (або максимальне) значення цільової функції. Іноді цікавляться лише мінімальним (або максимальним) значенням функції.

Усі зазначені задачі пов’язані одна з одною. Так, під час розв’язування задач оптимізації припускається, що в розпорядженні є метод перелічення елементів початкової множини (яка зазвичай є сукупністю елементів будь-якої великої множини, що задовольняє задану властивість), а для того, щоб оцінити ефективність методів перелічення або оптимізації, часто доцільно розв’язати задачу перерахунку елементів (у початковій множині або в деяких її підмножинах).

Метод твірних функцій — один із найуніверсальніших методів комбінаторики. Вони фактично кодують числові послідовності. Наприклад, поліном кодує скінченну послідовність (–1, 1, 4, 5,5). Цей принцип можна поширити й на нескінченні послідовності, отримуючи при цьому твірну функцію послідовності. Важливо, що знаючи твірну функцію послідовності, можна знайти кожен її елемент. Інколи набагато простіше аналітично знайти твірну функцію послідовності, а потім за твірною – саму послідовність, ніж безпосередньо аналітичний вираз для її елементів. Такий підхід становить загальну концепцію методу твірних функцій.

**Мета роботи -** проаналізувати підходи науковців щодо техніки застосування твірних функцій до розв'язування рекурентних рівнянь.

Для досягнення поставленої мети, сформулюємо та вирішимо наступні **задачі:**

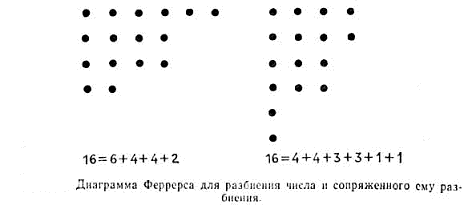
1. Припускаючи існування твірної функції послідовності, зарекурентним співвідношенням і початковими умовамиметодом еквівалентних перетворень побудуємо функціональне рівняння для твірної.

2. Знайдемо аналітичний(тобто нескінченно диференційовний у точці 0) розв’язок отриманого рівняння. Цей розв’язок є твірною шуканої послідовності.

3. Якщо аналітичних розв’язків не існує, то послідовність не мала твірної функції і треба шукати інший метод. Інакше за твірною функцією відновимо послідовність.

Предмет дослідження є розв’язування рекурентних рівнянь, а об’єктом дослідження – твірна функція та рекурентні рівняння.

Метод твірних функцій застосовний і до розв’язання інших комбінаторних задач. Оскільки послідовність однозначно відновлюється за своєю твірною, то в деяких випадках послідовність можна знайти у вигляді її твірної, а потім за твірною обчислити члени послідовності. Можливо, коротку аналітичну формулу для обчислення загального члена послідовності ми й не знайдемо, але за допомогою твірної функції зможемо обчислити довільний елемент послідовності. Цей метод застосовний до задач, пов’язаних із розбиттями чисел на доданки. Розглянемо задачу: скількома способами число *n* можна подати у вигляді суми де  натуральні числа? Суми, що відрізняються лише порядком доданків, вважаємо однаковими. Ця задача еквівалентна такій: скільки існує непорожніх послідовностей , де таких, що Такі послідовності називаються *розбиттями числа**n* на *m* доданків і задають невпорядкований розклад числа *n* на *m* доданків. Відкинувши умову отримуємо *впорядковане розбиття числа**n* на *m* доданків. Кількість розбиттів числа *n* на *m* доданків позначимо *P*(*n*, *m*). Загальну кількість розбиттів числа *n* на доданки позначимо *P*(*n*). Наприклад, послідовності (5, 3, 1, 1) та (6, 2, 2) є розбиттями (а також упорядкованими розбиттями) числа 10 на доданки; послідовність (1,3, 6) є впорядкованим розбиттям числа 10, але просто розбиттям не є. Для систематичності подальших міркувань вважатимемо порожню послідовність ( ) розбиттям числа 0. Кожному розбиттю числа *n* на *m* доданків поставимо у відповідність *діаграму Феррерса*, що утворюється таким чином: в *i*-му рядку ставимо крапок у послідовних вузлах цілочислової сітки (кожен рядок починається з тієї самої вертикалі),. При транспонуванні отримуємо діаграму Феррерса,що відповідає *спряженому розбиттю*. Розбиття називається *самоспряжени****м***, якщо воно дорівнює своєму спряженому розбиттю.



Метод рекурентних співвідношень такий само потужний, як і

метод математичної індукції, можливо тому, що вони мають однакову природу. Оскільки кожне рекурентне співвідношення разом із початковими умовами однозначно визначає єдину послідовність, то для знаходження елементів послідовності достатньо вказати для неї рекурентне співвідношення (тобто звести до меншої задачі) і початкові умови. Саме це й відбувається при застосуванні даного методу. Найцікавіше питання таке: як від рекурентного співвідношення перейти до аналітичної відповіді? У деяких випадках знайдене рекурентне співвідношення вдається розв’язати аналітично. Інколи в задачі отримують рекурентне співвідношення й початкові умови, для яких аналітична відповідь була одержана раніше. Оскільки рекурентне співвідношення разом із початковими умовами задають єдину послідовність, то в цьому випадку також маємо відповідь в аналітичній формі. В інших випадках рекурентне співвідношення й початкові умови можна розглядати як алгоритічну відповідь: щоб знайти конкретний елемент послідовності, заданої рекурентним співвідношенням, необхідно за порядком зростання номерівпослідовно обчислити її елементи, доки не буде отримане шукане значення.

Існує дві задачі, що приводять до рекурентних рівнянь:

* Перша задача-числа Фібонначі

Дослідження чисел Фібоначчі та їх властивостей представляє інтерес з точки зору принципів пізнання єдиності світу, оскільки в природі існує багато явищ, які описуються послідовностями чисел Фібоначчі. Одним із найголовніших наслідків цих властивостей є існування, так званих, коефіцієнтів Фібоначчі, тобто постійних співвідношень різних членів послідовності. У природі, архітектурі, образотворчому мистецтві, математиці, фізиці, астрономії, біології й багатьох інших областях були знайдені закономірності, які описувались числами або коефіцієнтами Фібоначчі.

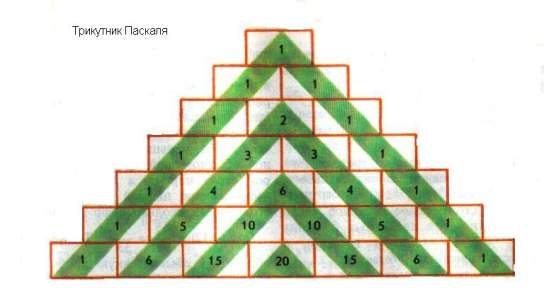
**Числа Фібоначчі**  — числова послідовність {F_n}, задана [рекурентним співвідношенням](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B5%D0%BA%D1%83%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%B5_%D1%81%D0%BF%D1%96%D0%B2%D0%B2%D1%96%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F" \o "Рекурентне співвідношення) другого порядку

 F_1=1, F_2=1, F_{n+2}=F_{n}+F_{n+1}, n=1,2,3,\ldots, 

 F_1=1, F_2=1, F_3=2, F_4=3, F_5=5, F_6=8, F_7=13, F_8=21, \, 

Простіше кажучи, перші два члени послідовності - одиниці,а кожний наступний - сумма значень двох попередніх чисел.

Числа Фібоначчі тісно пов’язані з трикутником Паскаля.



На рисунку зображено декілька перших рядків числового трикутника, утвореного за наступним правилом: по краям кожного рядка стоять одиниці, а кожне з інших чисел рівне сумі двох чисел попереднього рядка, що стоять над ним. За цим правилом легко виписувати одну за іншою нові рядки цього трикутника. Саме таким способом він показаний в «Трактате об арифметическом треугольнике» французького математика Б. Паскаля (1623 – 1662), що був опублікований в 1665р., вже після смерті автора. Але декілька інші варіанти цієї числової таблиці зустрічалися століттям раніше в італійського математика Н. Тартальї, а за декілька століть до цього у середньоазіатського ученого і поета Омара Хайяма, деяких китайських та індійських учених. Популярність чисел, що складають трикутник Паскаля, не дивна: вони виникають в самих звичайних задачах алгебри, комбінаторики, теорії ймовірностей, математичного аналізу, теорії чисел.

Рис. 4

* Друга задача - задача про багатокутник

У коло вписано правильний -кутник. Скількома способами можна попарно з'єднати його вершини так, щоб отримані відрізки не перетинались?

Нехай — кількість способів такого з'єднання. Позначимо точки в порядку, у якому їх розміщено на колі: Точку  можна з'єднати лише з однією з точок , а ні, то з кожного боку від хорди буде розміщено непарну кількість точок, і в разі попарного з'єднання принаймні одна хорда перетне ту, що виходить з . Припустимо, що точку з'єднано з . По один бік від хорди міститься 2k-2 точок; їх можна з'єднати попарно способами. З іншого боку від  міститься 2(n-k) точок, їх можна з'єднати попарно  способами. За правилом добутку кількість таких способів попарного з'єднання, коли  з'єднано з , дорівнює Параметр k може набувати значень 1, 2, ...,. Отже, 

Отже, рекурентне рівняння описує правило для знаходження елементів послідовності через один або декілька попередніх, причому задано відповідну кількість початкових елементів. Загального методу розв'язування рекурентних рівнянь немає. Проте певний клас рівнянь можна розв'язувати однаковим методом. Даний метод у комбінаториці полягає у зведенні комбінаторної задачі до аналогічної задачі для меншої кількості об'єктів.

**Література**

*1. «Дискретна математика». О. В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина.*

*2. «Комп’ютерна дискретна математика». М. Ф. Бондаренко, Н.В. Білоус, А.Г. Руткас.*

*3. «Дискретна математика для програмістів». Ф. А. Новіков.*

*Брюхань Л.І., бакалавр*

*Левчук В.М., асистент*

*Полтавський національний технічний університет*

*імені Юрія Кондратюка*

**Застосування твірних функцій до розв’язання рекурентних рівнянь**

*У статті описано техніку застосування твірних функцій до розв’язання рекурентних рівнянь. Подано дві задачі, що призводять до рекурентних рівнянь: числа Фібоначчі і задача про багатокутник.*

*Об’єктом дослідження є твірна функція та рекурентні рівняння.*

***Ключові слова:*** *твірна функція, рекурентні рівняння, числа Фібоначчі, розбиття чисел, діаграма Феррерса, трикутник Паскаля.*

*Брюхань Л.И., бакалавр*

*Левчук В.М., ассистент*

*Полтавский национальный технический университет*

*имени Юрия Кондратюка*

**Применение производящих функций к решению рекуррентных уравнений**

*В статье описана техника применения производящих функций к решению рекуррентных уравнений. Подано две задачи, которые приводят к рекуррентных уравнений числа Фибоначчи и задача о многоугольник.  
Объектом исследования является образующая функция и рекуррентные уравнения.****Ключевые слова :*** *образующая функция, рекуррентные уравнения , числа Фибоначчи , разбиение чисел, диаграмма Феррерс , треугольник Паскаля.*

*Bruihan L.I., bachelor*

*Levchyk V.M., assistant*

*Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University*

**Application of generators functions**  **to the solution of recurrent equations**

*The article describes application of machinery generators functions to the solution of recurrent equations. Posted two problems that lead to recurrent equations: Fibonacci numbers and the problem of the polygon.  
The object of study is the generating function and recurrent equation.****Keywords:*** *generating function, recurrence equation, Fibonacci numbers, the partition numbers chart Ferrers, Pascal's Triangle.*