УДК 330.4
JEL C44
DOI: 10.26906/EiR.2023.1(88).2886

ПОШУК ОПТИМАЛЬНИХ ЛІНІЙ СПОЛУЧЕННЯ МЕТОДОМ ГРАФІВ

Возняк Ольга Григорівна*, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики, Західноукраїнський національний університет
Голубник Ольга Романівна, кандидат економічних наук, доцент кафедри інформаційних систем у менеджменті, Львівський національний університет імені Івана Франка**

** ORCID 0000-0002-9528-9059*
*** ORCID 0000-0003-1211-4614*

Стаття отримана редакцією 19.02.2023 р.
The article was received by editorial board on 19.02.2023

Вступ. Вся людська діяльність планується для знаходження оптимальних відстаней, часу, обсягу робіт, вартості, кількості об'єктів і т. д. Без всього цього неможливо координувати роботу підприємства, виробничих ділянок, будівництво фабрик, заводів, спортивних майданчиків, строго в часі розписати відповідно до графіка роботу міського транспорту та міжміських потягів. Очевидно, що чим краще складено графік виконання робіт, тим більша продуктивність праці та чим менші затрати на виконання певної роботи, тим кращі й самі результати. В основі знаходження екстремумів лежить метод побудови графів, який називають ***порфіріаном***.

Огляд останніх джерел досліджень і публікацій. Теорія графів була об'єктом наукових досліджень не одне десятиліття. Концептуальні підходи до побудови оптимальних імовірнісних двійкових дерев пошуку досліджено авторами в роботі [1]. Також серед науковців слід відзначити також Лященка М.Я., Голованя М.С. [2], Твердохліба І.П., Цегелика Г.Г. [3], Возняк Г.М. [4]. Проте потребують подальшого дослідження прикладні аспекти побудови оптимальних відстаней.

Метою дослідження є застосування теорії найкоротших ліній для розв'язування економічних задач.

Основний матеріал і результати. Для проектування ліній зв'язку, транспортних ліній, різного роду сіток, пов'язаних з ціною, часом, довжиною водопровідних і електричних ліній, відношеннями між підприємствами, велике значення має наступна практична задача.

На місцевості знаходиться n об'єктів (точок). Потрібно всіх їх з'єднати такою сіткою відрізків, загальна довжина яких була б найменшою.

Тут може виникнути запитання: як потрібно представити собі найкоротшу сітку (мережу), про яку говориться в задачі. Відповідь на це запитання повинна бути такою: щоб із будь-якої даної точки можна було б пройти в будь-яку іншу точку по ламаній лінії з оптимальною вигодою, яка складається з відрізків цієї сітки.

Візьмемо, наприклад, *сім точок (об'єктів) і сполучимо їх найкоротшою телефонною лінією* (рис. 1).

Для того, щоб з'єднати всі сім об'єктів найкоротшою ламаною лінією, встановимо властивості найкоротшої сітки відрізків. Домовимося про термінологію. Дані об'єкти (точки) будемо називати *вершинами сітки*. Довжина сітки – це сума довжин всіх відрізків ламаної. Ця ламана представляє собою логічний зв'язок під час виконання робіт, яка розбивається на виконання певних завдань.

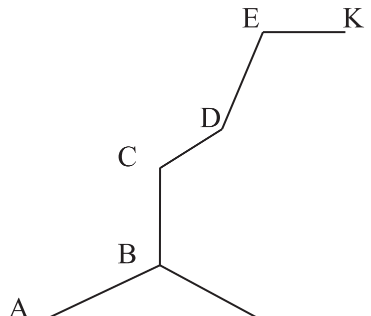

Рис. 1.

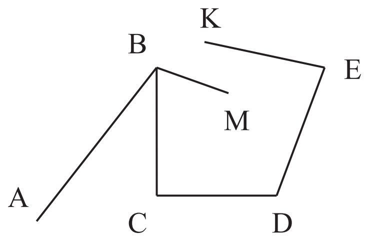

Рис. 2.

Найближчу сусідню вершину ламаної до даної точки треба вважати таку точку, яка в ході побудови сітки знаходиться від даної вершини на найменшій відстані. *Фрагментом сітки* будемо називати вершини разом із відрізками, що з'єднують їх, які в ході побудови сітки вже появилися. Домовимося ще про те, що під *відстанню від вершини до фрагменту* чи навпаки, слід розуміти найменшу із відстаней цієї вершини від кожної вершини даного фрагменту і у зв'язку з цим найближчою. *Сусідкою фрагменту* будемо називати вершину, яка знаходиться від даного фрагменту на найменшій відстані.

В нашому випадку (рис. 1) об'єкт *A* з'єднуємо з об'єктом *B* (бо $AB < AM$ і $AB < AC$), об'єкт *B* з'єднуємо з об'єктом *C* (бо $BC < BD$ і $BC < BM$), об'єкт *C* з'єднуємо з об'єктом *D* (бо $CD < CM$ і $CD < CE$), об'єкт *D* з'єднуємо з об'єктом *E* (бо $DE < DM$ і $DE < DK$), об'єкт Е з'єднуємо з об'єктом *K* (бо $EK < EM$). На кінець об'єкт *M* з'єднуємо з об'єктом *B* (бо $MB < MC$ і $MB < MA$).Отже, властивістю найкоротшої сітки буде така:

1. *Кожна вершина найкоротшої сітки безпосередньо з'єднана з найближчою сусідньою (або однією із них, якщо ближчих сусідніх точок не одна).*

Для спрощеного розуміння припустимо, що всі відстані між вершинами різні. Нехай для даних *n* вершин існує найкоротша сітка, яка не володіє розглянутою властивістю, тобто деяка вершина *B* не пов'язана безпосередньо з властивістю найближчої сусідньої точки *K* (рис. 2).

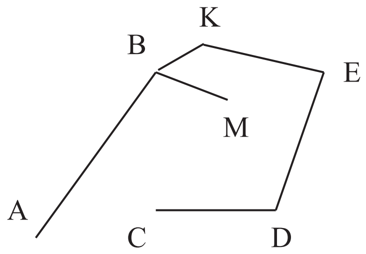

Рис. 3.

Вершина *B* безпосередньо пов'язана з вершинами *A, C* і *M* (відмінно від *K*). Будь-яка із вершин *A*, *C* і *M* пов'язана з вершиною *K* однією ланкою або їх ланцюжком (рис. 2). Нехай, наприклад, вершина *C* зв'язана з *K* ланцюжком *CDEK*. Вилучимо ланку *BC* і додамо ланку *BK*. Ця заміна не порушить зв'язності сітки. Але зміниться довжина сітки. Оскільки вершина *K* – найближча сусідка вершини *B*, то $BC>KB$. Отже, довжина сітки зменшиться, тобто одержимо сітку більш оптимальну (рис. 3), і коротшу. Ми прийшли до суперечності, тому попередня пропозиція повинна бути відкинута. Отже, кожна вершина найкоротшої сітки повинна бути безпосередньо зв'язана з найближчою сусідньою вершиною.

Аналогічно до першої властивості найкоротшої сітки, можна сформулювати другу властивість.

2. *Кожний фрагмент найкоротшої сітки з'єднаний безпосередньо з найближчим фрагментом (або одним із них, якщо ближчих фрагментів декілька) найкоротшою сіткою.* Відмітимо, що вершину можна вважати частковим випадком фрагменту.

Спираючись на встановлені дві властивості найкоротшої сітки, можна сформулювати два основних правила побудови найкоротшої сітки.

1. Довільна ізольована вершина повинна з'єднуватися з найближчою сусідньою.

2. Довільний ізольований фрагмент повинен з'єднуватися з найближчою до нього сусідньою найкоротшою сіткою.

Застосовуючи ці два правила у будь-якій послідовності, можна побудувати найкоротшу сітку. Починати побудову сітки потрібно однократно застосовувати перше основне правило найкоротшої сітки. Одержимо фрагмент (одну ланку). Далі потрібно застосовувати друге основне правило найкоротшої сітки для побудови розширення вихідного (початкового) фрагменту до найкоротшої сітки.

Повернемося до нашого прикладу найкоротшої сітки (рис. 1). Ми будували її так: користуючись першим правилом найкоротшої сітки побудували ланку *AB*. Далі, користуючись другим основним правилом, послідовно будували ланки *BC, CD, DE, EK* і *BM*. Але за вихідну точку (об'єкт) можна взяти будь-яку іншу, наприклад, точку *D*. В такому випадку, додержуючись першого основного правила побудови найкоротшої сітки, ми отримуємо ту саму найкоротшу сітку (рис. 1), яка складається з тих самих фрагментів (ланок), що описані вище. Різниця лише в тому, що побудова сітки матиме інший порядок: *DC, CB, BA, DE, EK, BM*, тобто від перестановки доданків сума не зміниться [4, с. 62].

Графи. Розглянемо таку ситуацію. Зібралося 5 представників *A, B, C, D* і *K* різних підприємств, які між собою мають деякі взаємовідносини. Одні з них знайомі між собою, але є й такі, що не знайомі між собою, тобто підприємства не мають між собою ніяких взаємовідносин. Представник підприємства *A* знайомий з *B* і *C*; представник підприємства *B* знайомий з *A, C* і *D*; представник підприємства *C* знайомий з *A* і *B*; представник підприємства *D* знайомий тільки з *B*; представник підприємства *K* не знайомий з ніким.

Відношення між представниками підприємств можна подати графічно. На рис. 4 зображено відношення між представниками підприємств. Точками *A, B, C, D* і *K* зображено п'ять представників. Кожному із представників поставлено відповідно одну і тільки одну точку. Якщо два представники мають між собою певні взаємовідносини, то точки з'єднуємо відрізками (або іншими якими-небудь лініями). В результаті ми отримали геометричну фігуру (рис. 4), яку називають ***графом***. Так що сітковий графік є графом.

Отже, *конструкцію, складену з точок (кілець) з'єднаних відрізками або кривими чи дугами, прийнято називати графом.*

Графи в математиці, економіці відіграють велику роль. Ними доцільно користуватися при розв'язуванні багатьох задач, зміст яких пов'язаний з різними шляховими сполученнями, часом, кількістю об'єктів, різними величинами, певними відношеннями між людьми, підприємствами тощо.

Графи бувають повними і неповними. Граф будемо називати ***повним***, якщо будь-які дві його вершини з'єднані ребром. Граф, зображений на рис. 4, не є повним. Щоб граф був повним, потрібно вершину *K* з'єднати з вершинами *A, B, C* і *D*; вершину *A* з'єднати з вершиною *D*; вершину *C* з'єднати з вершиною *D*, тобто, щоб граф був повним, потрібно, щоб всі підприємці, що зібралися, були знайомі між собою і мали між собою деякі стосунки. Вершина *K* (рис. 4) називається ***ізольованою***. Граф, всі вершини якого ізольовані називається ***нуль-графом***. Якщо виявиться так, що із будь-якої вершини графа по ребрах можна пройти в будь-яку іншу вершину, то такий граф називається ***зв'язним***. Граф зображений на рис. 4 не є зв'язним. Незв'язний граф розпадається на окремі частини, не з'єднані ребрами. Ці частини називаються ***зв'язними компонентами графа***. На рис. 4 таких компонентів є два; *ABD* і *ACBD*. ***Ланцюжком графа*** називається послідовність ребер, що становлять неперервну лінію. Якщо початок ланцюжка збігається з його кінцем, то такий ланцюжок називається циклом. На рис. 4 зображено два ланцюжки – це *ABD* і *ACBD*, а ламана *ACDA* – цикл.

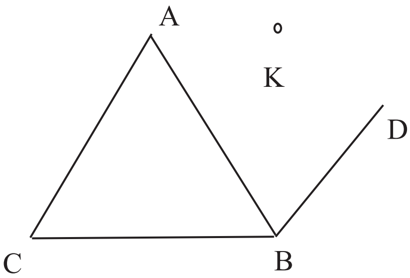

Рис. 4.

Дерево. Може бути так, що зв'язний граф зовсім не буде мати циклів. Такий граф в математиці та економіці за своїм зовнішнім виглядом називається ***деревом***. Граф, зображений на рис. 1, є деревом. Довільний зв'язний граф (скінченною кількістю вершин), який містить цикл можна перетворити в дерево. Це можна зробити так: якщо граф містить який-небудь цикл, то достатньо вилучити одне із ребер цього циклу. Якщо після цього граф ще буде містити цикл, то знову вилучити яке-небудь його ребро. Продовживши це вилучення ребер до тих пір, поки не одержимо граф-дерево. Звичайно, ребра потрібно вилучати так, щоб граф залишився зв'язним. З граф-деревом, в практиці, приходиться мати справу досить часто. Карта доріг, схема водопроводу, газопроводу, теплопроводу, телефонних ліній, електроліній і т. д. – все це дерева. Побудовані найкоротші сітки не можуть мати ні одного циклу. Якщо сітка містила би який-небудь цикл, то одне його ребро можна вилучити. Одержаний граф стане зв'язним, а сума довжин його ребер виявиться найменшою. Тому найкоротша сітка повинна бути деревом.

Побудову найкоротшої сітки можна описати наступним чином. Згідно з першим правилом побудови найкоротшої сітки перше ребро має бути найкоротшим із всіх ребер. Далі побудова найкоротшої сітки відбувається згідно з другим правилом. Друге ребро повинно бути найкоротшим від усіх ребер, що залишилися. Продовжуючи цей підбір ребер, потрібно кожний раз брати найкоротше ребро від усіх ребер, що залишилися, при цьому не повинен утворитися цикл. Оскільки кількість вершин є скінченною, то процес на деякому кроці закінчиться. Такий граф буде деревом, яке є найкоротшою сіткою.

Порфіріан. Звичайно на рис. 1 зображено досить простий граф, який не дає повного уявлення про такий граф як дерево. Розглянемо такий граф, який дасть повне уявлення про граф-дерево.

Спочатку дамо деякі означення про отримані розв'язки задачі. Об'єкт, при якому функція-критерій набуває екстремального – мінімального або максимального значення, називається ***екстремальним*** або ***оптимальним розв'язком***.

Множину елементів (об'єктів), серед яких міститься екстремальний, називають ***множиною можливих розв'язків допустимих варіантів***.

Якщо множина скінченна, тобто складається із скінченої кількості цих варіантів і є невеликою, то можна послідовно розглянути всі можливі розв'язки. На кожному допустимому варіанті можна обчис-

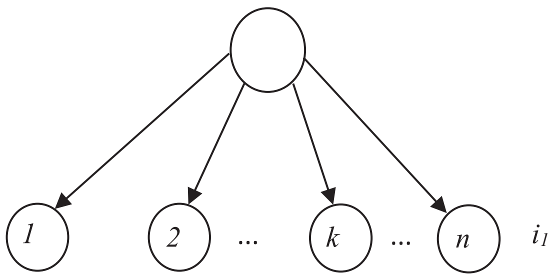

Рис. 5.

лити значення функції-критерію. Порівнюючи ці значення можна вибрати оптимальний розв'язок. Власне в цьому і полягає метод перебору. Зобразимо графічно кільцем множину всіх можливих *n* перестановок. Розіб'ємо цю множину на *n* підмножин, відносячи до однієї підмножини всі ці перестановки, у яких на першому місці знаходиться одне і те саме число i_1. У першу підмножину попадають всі перестановки, у яких на першому місці розміщене число 1 (i_1=1), у другу підмножину попадають перестановки, в яких на першому місці розміщене число i_1=2 і т.д. [2].

Зобразимо ці підмножини графічно також кільцями, всередині кожного кільця запишемо значення i_1 і з'єднаємо стрілками із знаком множини всіх можливих *n* перестановок, так як це показано на рис. 5.

У свою чергу кожну із цих множин можна ще розділити на неперетинні підмножини в залежності від того, яке число розміщене в перестановці на другому місці (рис. 6) і знову утворені підмножини можна розбити на частини в залежності від того, яке число розміщене на третьому місці і т. д. Процес такого послідовного розбиття множини на підмножини обірветься тоді, коли ми підійдемо до окремих одиничних перестановок [2, с. 217]. На рис. 7 подано результат такого послідовного розбиття множини всіх перестановок чисел 1, 2, 3. Отриманий графік, по суті, стає реалізацією алгоритму отриманих всіх перестановок. Такі графічні зображення послідовного розбиття множини всіх варіантів розв'язку задачі називають ***порфіріаном***.

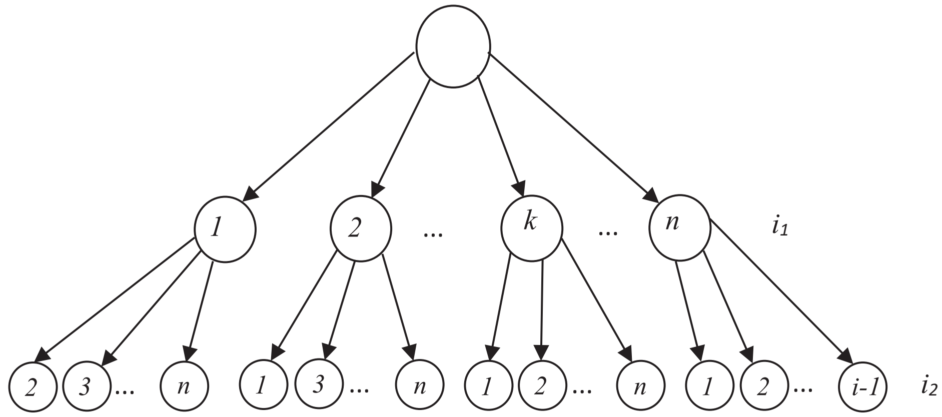

Рис. 6.

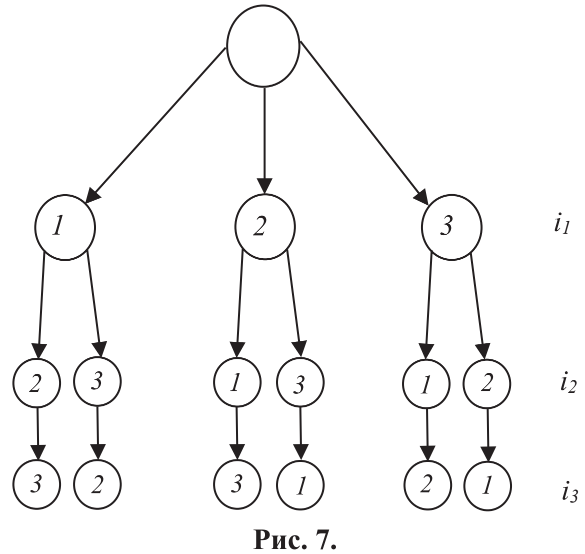

Рис. 7.

Кожна вершина в порфіріані знаходиться на деякому рівні. В нашому прикладі вершини, що відповідають фіксації i_1, розміщені на першому рівні фіксації, i_2 – на другому рівні; вершини розміщені на k-му рівні, відповідають відрізку завдовжки *k* *n*-перестановок

$$\sigma_k = \langle i_1, i_2, ..., i_k \rangle.$$

Вершини, що розміщені на n-му рівні, відповідають «повні» перестановки σ_nσ_n:

$$\sigma_n = \langle i_1, i_2, ..., i_n \rangle.$$

Побудова вершин (*k*+1)-го рівня порфіріана, виходячи із деякої вершини *k*-го рівня, називають ***операцією розгалуження***.

Вміння правильно визначити операцію розгалуження є рівносильним до знання конструювання всього порфіріана, тобто знання алгоритму побудови всіх можливих варіантів розв'язку задачі (можливими варіантами вважаються ті перестановки, які задовольняють всі умови задачі, за винятком умови, яка призводить до екстремуму функції-критерію).

Розглянемо так звану задачу блукаючого торгівця (агента торгівлі), яка формулюється наступним чином: *деякий агент торгівлі повинен об'їхати n населених пунктів так, щоб в кожному населеному пункті побувати тільки один раз, здійснивши це, проїхати мінімальний шлях (відстань l_{ik} між будь-якими відомими двома заданими містами i та k)* [3, с. 196].

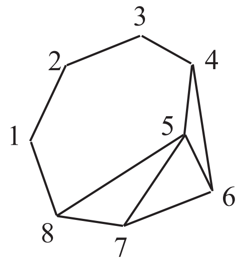

Рис. 8.

Замість відстані між містами може бути: заданий час мандрівника, при якому потрібно здійснити цю подорож за мінімальний час; може бути вартість поїздки, певна деяка вигода і т.д. Задача спрощується, якщо вважати, що міста задані точками на площині, а відстань між двома містами задається довжиною відрізків. Вимагається з'єднати всі точки замкнутим контуром мінімальної довжини.

Для такої постановки задачі стають правильним такі твердження:

1) шлях блукаючого торгівця не має самоперетину;

2) оптимальний маршрут не містить розгалуження на окремі фрагменти (відрізки);

3) найкоротший шлях блукаючого торгівця по всіх точках, які є вершинами деякого випуклого многокутника, є межею цього многокутника.

Допустимо, що агент торгівлі має об'їхати 8 пунктів, зображених на рис. 8, де всередині розміщений пункт 5, проте зрозуміло, що розв'язком цього завдання буде контур, який близько підходить до межі многокутника (згідно з твердженням 3). Візуально можна оцінити, що в пункт 5 найкраще заїхати із пунктів 4, 6 і 7, а із інших пунктів явно недоцільно їхати. Легко отримаємо множину можливих розв'язків, в такому випадку їх буде три варіанти, представлених порфіріаном на рис. 9:

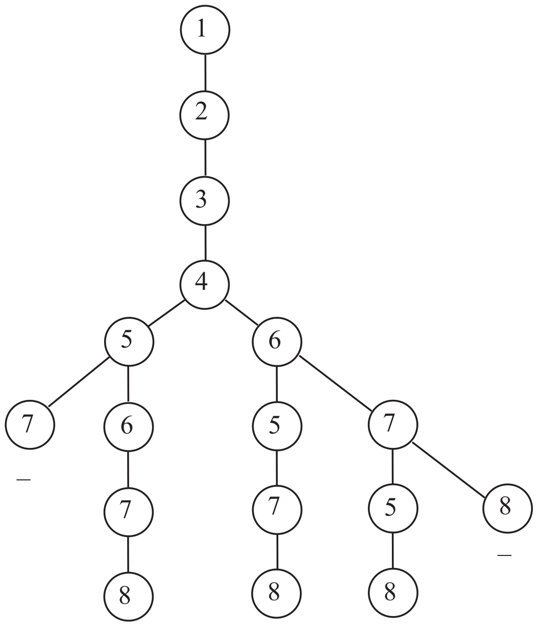

Рис. 9.

$\langle 1,2,3,4,5,6,7,8 \rangle$, $\langle 1,2,3,4,6,5,7,8 \rangle$, $\langle 1,2,3,4,6,7,5,8 \rangle$.

Знаком «–» позначені варіанти, які виявились неприйнятними, оскільки порушується друга умова (маршрут не містить розгалуження на окремі ланцюжки). Візуально, зрозуміло, що із трьох можливих варіантів найкоротшим буде перший шлях $\langle 1,2,3,4,5,6,7,8 \rangle$. Звичайно, що обернений варіант буде еквівалентним: $\langle 8,7,6,5,4,3,2,1 \rangle$.

Відмітимо, що в багатьох практичних постановках такі обмежуючі пересування блукаючого торгівця дороги бувають вказані в умові завдання, і зображуються звичайно у форм графа вигляду рис. 8.

Поки що розглядалися практичні задачі економічного змісту про найкоротші сітки, задані рисунками графічно, де кожний відрізок мав певну довжину. При розв'язуванні таких задач приходилося геометрично порівнювати довжини даних відрізків. Але ці відстані між вершинами ламаної можуть бути задані числами поставлених на відрізках ламаної, які вказують на довжину відповідного відрізка. Це показано на схематичному рис. 10. Відстані між вершинами ламаної можна подати й в таблиці з двома входами. Причому ці числа можуть виражати не тільки відстані, а й такі величини, як: час, маса, електричний опір, вартість, певні відношення між підприємствами і т. д. Числа, що розміщені в табл. 1, або на схематичному рис. 10, можуть бути не тільки додатними, але й від'ємними. В такому випадку їх розв'язування залишаються такими самими як і з додатними числами. В кожному із цих випадків, для побудови найкоротшої сітки, приходиться числові значення певних величин порівнювати. Замість геометричного порівняння довжин відрізків будемо порівнювати числові значення, подані на рис. 10 або в табл. 1.

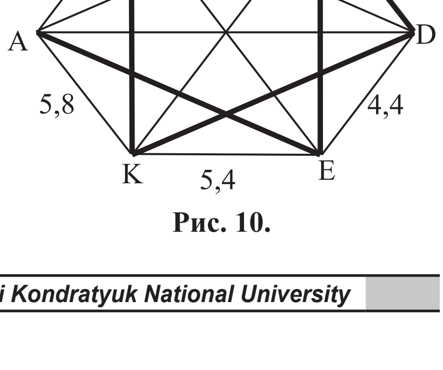

Рис. 10.

Розглянемо задачу, умова якої задана схематично (рис. 10) та в табл. 1. Ставиться вимога: *шість об'єктів A, B, C, D, E і K з'єднати найкоротшою електричною лінією*.

Таблиця 1

Вихідні дані задачі

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*K*
A	–	6	7	4,5	4	5,8
B	6	–	5	4,8	5,1	4,6
C	7	5	–	3	3,2	4,2
D	4,5	4,8	3	–	4,4	3,8
E	4	5,1	3,2	4,4	–	5,4
K	5,8	4,6	4,2	3,8	5,4	–

В табл. 1 подані числа вказують на відстань між об'єктами, або вартість побудови кожної ланки електричної лінії. Кількість всіх можливих варіантів побудови електричної лінії визначається перестановкою 6 елементів (об'єктів), тобто *P*=6!=720. Звичайно половина цих варіантів мають зворотний шлях, тобто серед них є еквівалентні. З кількості 360 варіантів побудови електричної лінії (сітки) потрібно знайти оптимальний.

Для знаходження оптимального варіанту, потрібно визначити кількість всіх ланок, які з'єднують відомі об'єкти. Оскільки кількість об'єктів 6 і кожна ланка з'єднує два об'єкти, то кількість ланок, які з'єднують 6 об'єктів визначаються комбінацією з 6-ти елементів по 2, тобто $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$. Щоб полегшити. порівняння цих 15-ти ланок треба ці відстані виписати із табл. 1 у вигляді впорядкованої зростаючої послідовності, а також виписати відповідні фрагменти (ланки), які вказують на ці відстані. Всі ці дані помістимо в табл. 2.

Таблиця 2

Впорядкування фрагментів

Відстані	3	3,2	3,8	4	4,2	4,4	4,5	4,6	4,8	5	5,1	5,4	5,8	6	7
Фрагменти	*CD*	*CE*	*DK*	*AE*	*CK*	*DE*	*AD*	*KB*	*BD*	*BC*	*BE*	*EK*	*AK*	*AB*	*AC*

Користуючись табл. 2, згідно з першим основним правилом найкоротшої сітки, із послідовності чисел, що вказують на відстань між об'єктами, випишемо найкоротше ребро *CD*. Дивлячись на рис. 10 будуємо ребро *CD*. Далі, будемо користуватися другим основним правилом найкоротшої сітки, вибираємо найкоротше ребро, що залишились в табл. 2, яке виходить з кінців ребра *CD*. Отримаємо відрізок *CE*. Матимемо фрагмент *D – C – E*. Зауважимо, що при побудові найкоротшого дерева потрібно постійно слідкувати, щоб не утворювалися цикли. До отриманого фрагменту *E – C – D* знаходимо найближчу вершину *K*. Приєднавши ребро *DK* до отриманого фрагмента *E – C – D*, матимемо фрагмент *E – C – D – K*. Далі найближчим об'єктом до знайденого фрагмента буде вершина *A*. Приєднаємо ребро AE до побудовано фрагмента *E – C – D – K*. Матимемо фрагмент *A – E – C – D – K*. На кінець, найближчою вершиною до знайденого фрагмента буде вершина *B*. Отримаємо найкоротший фрагмент (схему) *A – E – C – D – K – B*. Довжина оптимального варіанту побудови електричної лінії становитиме: 4+3,2+3+3,8+4,6=18,6 (од.).

Отриманий оптимальний граф-дерево зображений жирною ламаною на рис. 10.

До цих пір розглядалися задачі на знаходження найкоротшої сітки (дерева). Приступимо до розв'язування задачі, що може мати практичне значення, на побудову сітки (дерева) найбільшої довжини. Так до розглянутого повного графа (рис. 10) та відповідних йому табл. 1 і табл. 2 можна поставити вимогу: знайти дерево найбільшої довжини. Такому повному графу може відповідати така ситуація. Допустимо, що табл. 1 і повний граф (рис. 10) відображає речі, які має взяти з собою мандрівник, ідучи в похід (на екскурсію). Довжина ребра вказує на цінність речей для мандрівника в дорозі. Точкам (вершинам) відповідає назви речей.

Такі задачі розв'язуються, аналогічно до розглянутих задач про будову найкоротшої сітки. Для цього достатньо на першому етапі побудови графа шукати найбільше значення фрагмента згідно з першим основним правилом найкоротшої сітки. Далі, користуючись другим основним правилом, знаходять найбільший наступний фрагмент, який має найбільше значення із тих, що залишилися, виходячи із кінців вершин попереднього фрагмента.

Будуємо найбільше ребро *AC*, далі приєднуємо нього ребро *BA*, яке є найбільшим із тих, що залишилися. Отримали фрагмент *B – A – C*. Будуємо ребро *AK*. Отримаємо фрагменти *B – A – K* і *AC*. Приєднавши ребро *KE* до фрагмента *B – A – K* отримаємо фрагмент *B – A – K – E* і *AC*. На кінець, приєднавши ребро *DB* до попереднього фрагмента, отримаємо фрагмент *D – B – A – K – E*. Найбільше дерево *D – B – F – K – E* і *AC* зображено на рис. 10. Оптимальний варіант побудови найбільшого дерева в такому випадку становитиме: 4,8+6+7+5,8+5,4=29 (од.).

Задачу на побудову найбільшої сітки (дерева) можна звести й до задачі на побудову найкоротшої сітки. Якщо відстань між точками задані числами, то ці числа достатньо замінити оберненими числами і далі будувати найкоротшу сітку.

Розглянемо ще задачу на знаходження мінімальної сітки, яка пов'язує п поданих попарно неперетинних відрізків, які є певними об'єктами. Перш за все домовимося, що будемо розуміти під відстанню між двома даними відрізками. ***Найменшою відстанню між двома відрізками*** будемо вважати відстань між будь-якими точками одного відрізка до точки другого відрізка. Якщо, наприклад, відрізки *a* і *b* розміщені так, як показано на рис. 11, то відстань між ними дорівнює довжині відрізка *AB*.

Для побудови мінімальної сітки, яка пов'язує відрізки, можна поступати так само, як і при розв'язуванні задачі найкоротшої сітки, яка пов'язує точки. Тільки роль точки відіграє сам відрізок. Самі відрізки в сітку не включаються.

Висновки. При розв'язуванні різноманітних економічних задач приходиться будувати схеми, графи, таблиці. Встановлювати алгоритми – подані у вигляді порфіріана. В статті описано конструкцію графа-дерева. Сформульовано властивості мінімальної сітки та способи її побудови, яка використовується для розв'язування оптимального планування виробничих процесів. Сформульовано основні правила побудови найкоротшої сітки, дерева. Застосовані методи побудови найкоротшої сітки та дерева забезпечать побудову деяких оптимальних планів виробничого, торговельного та транспортного характеру, забезпечать можливості моделювання виробничих процесів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Кардаш Я.А., Цегелик Г.Г. До побудови оптимальних імовірнісних двійкових дерев пошуку. *Вісник Львівського ун-ту. Серія механіко-математична.* 1998. Випуск 50. С. 110–117.
2. Лященко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи. Київ : Лебідь, 1996. 280 с.
3. Твердохліб І.П., Цегелик Г.Г. Метод визначення стабілізованої функції споживання. *Вісник Львівського ун-ту. Серія механіко-математична.* 1998. Випуск 50. С. 196–200.
4. Возняк Г.М. Екстремальні задачі на позакласних та факультативних заняттях. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики: Розв'язування екстремальних задач : метод. посібник. Київ, 1984. 80 с.

REFERENCES:

1. Kardash Ya.A., Tsehelyk H.H. (1998). To the construction of optimal probabilistic binary search trees. *Bulletin of Lviv University. Mechanical-mathematical series*, 50, 110–117.
2. Liashchenko M. YA., Holovan M.S. (1996). Numerical Methods. Kyiv: Lebid, 280 p.
3. Tverdokhlib I.P., Tsehelyk H.H. (1998). The method of determining the stabilized consumption function. *Bulletin of Lviv University. Mechanical-mathematical series*, 50, 196–200.
4. Vozniak H.M. (1984). Extreme tasks in extracurricular and optional classes. Applied orientation of the school mathematics course: Solving extreme problems. Kyiv, 80 p.

УДК 330.4

JEL C44

Возняк Ольга Григорівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики, Західноукраїнський національний університет. **Голубник Ольга Романівна,** кандидат економічних наук, доцент кафедри інформаційних систем у менеджменті, Львівський національний університет імені Івана Франка.

Пошук оптимальних ліній сполучення методом графів.

В статті проаналізовано роль математичного дослідження економічних явищ та процесів. Встановлено, що багато задач з економіки розв'язуються методом побудови графів, які зводяться до впорядкування деяких робіт, що приводить до знаходження оптимального значення певних величин. Розглянуто порівняно нові математичні задачі, які відносяться до теорії найкоротших ліній та теорії графів, що мають практичне застосування для економіки. Запропоновано наближені методи для розв'язування задач на знаходження оптимальних ліній різного роду сполучення шляхів. Встановлено, що кожна така задача потребує своєрідного підходу, в основу якого покладено метод перебору перестановок. Розглянуто застосування методу перебору до розв'язування задач черговості, перестановок, які зводяться до впорядкування виконання деяких робіт методом графів.

Ключові слова: найкоротші сітки, вершини сітки, фрагмент, повний граф, неповний граф, ребро, ізольована вершина, нуль-граф, зв'язний граф, незв'язний граф, ланцюжок графа, цикл, дерево, замкнутий контур, алгоритм, порфіріан.

UDC 330.4
JEL C44

Olha Vozniak, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Economic Cybernetics and Informatics Department, West Ukrainian National University. **Olga Holubnyk,** PhD in Economics, Associate Professor of Management Information Systems Department, Ivan Franko National University of Lviv. **Search of optimal connection lines using the graph method.**

The article analyzes the role of mathematical research of economic phenomena and processes. It has been established that many problems of the economy involving finding the optimal distances, time, volume of work, cost, number of objects are solved by the method of constructing graphs. These tasks are reduced to ordering some works, which leads to finding the optimal value of certain values. Comparatively new mathematical problems related to the theory of shortest lines and the theory of graphs, which have practical applications for economics, are considered. The purpose of the article is to apply the theory of shortest lines for solving economic problems. The basis of finding extremums is the method of constructing graphs, which is called porphyrian tree. The article describes the construction of a graph-tree. The properties of the shortest network of segments are defined. Based on the established two properties of the shortest grid, two basic rules for constructing the shortest grid are formulated. and methods of its construction, which is used to solve the optimal planning of production processes. The first of them is that an arbitrary isolated vertex must connect to its nearest neighbor. The second property states that an arbitrary isolated fragment must connect to its nearest neighbor shortest grid. By applying these two rules in any sequence, the shortest grid can be constructed. The paper proposes approximate methods for solving problems of finding optimal lines of various types of road connections. It has been established that each such problem requires a unique approach, which is based on the permutation method. The application of the sorting method to solving problems of sequence and permutations, which boil down to ordering the execution of some works by the method of graphs, is considered. Porphyrian tree presented a set of possible solutions to the problem of the wandering merchant. It has been established that the application of methods of constructing the shortest grid and tree will ensure the construction of some optimal plans of a production, trade and transport nature, will provide opportunities for modeling production processes.

Key words: shortest grids, grid vertices, fragment, complete graph, incomplete graph, edge, isolated vertex, null graph, connected graph, disconnected graph, graph chain, cycle, tree, closed circuit, algorithm, porphyrian tree.